

Physikalisches A-Praktikum

Versuch 10

Die Potentialwaage

Praktikanten: Nils Kanning
Steffen Klemer
Durchgeföhrt am: 06.07.2006
Gruppe: 12
Assistent: Thomas Koeppel

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
2	Theorie	4
2.1	Das elektrische Feld	4
2.2	Das elektrische Potential	4
2.3	Das Gauß'sche Gesetz	5
2.4	Der Plattenkondensator	5
2.5	Transformator und Gleichrichter	6
3	Durchführung	6
3.1	Kirchhoffsche Potentialwaage	6
3.2	Messreihen	7
3.2.1	Konstante Kraft	7
3.2.2	Konstanter Plattenabstand	7
4	Auswertung	8
4.1	Konstante Kraft	8
4.2	Konstanter Plattenabstand	9
5	Einordnung der Ergebnisse	10
A	Tabellen und Grafiken	11

1 Einleitung

Kaum ein modernes Gerät kommt ohne elektronische Helferlein aus. Praktisch alle modernen Anwendungen machen sich elektromagnetische Kräfte zunutze. Kondensatoren und Spulen sind aus dem heutigen Leben nicht mehr wegzudenken.

Alle physikalischen Gesetze, die mit diesen beiden Bauteilen zu tun haben, beinhalten eine Naturkonstante, die *Elektrische Feldkonstante* ε_0 . Der Versuch der Potentialwaage stellt eine Möglichkeit dar, sie experimentell zu bestimmen.

2 Theorie

2.1 Das elektrische Feld

Das Feld einer elektrischen Punktladung Q am Ort \vec{x}_Q wird durch

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}_Q}{|\vec{x} - \vec{x}_Q|^3}$$

definiert. Die von ihm erzeugte Kraftwirkung auf eine Probeladung q am Ort x ergibt sich damit zu

$$\vec{F} = q\vec{E} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}_Q}{|\vec{x} - \vec{x}_Q|^3}$$

Hierbei ist ε_r eine Materialkonstante, die für das Vakuum 1 und für Luft ≈ 1 ist und ε_0 die gesuchte Naturkonstante. Das Kraftgesetz ist dem Gravitationsgesetz sehr ähnlich. Es fällt ebenso quadratisch mit dem Abstand und beschreibt die Wirkung von einer Ladung auf eine andere in einem bestimmten Abstand. Mit dem dritten NEWTONschen Axiom kann die Kraft auch geschrieben werden als

$$\vec{F}_{12} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^3} = -\vec{F}_{21}.$$

2.2 Das elektrische Potential

MAXWELL hat herausgefunden, dass auch das elektrische Feld rotationsfrei ist, also aus einem Potential herrührt¹. Das elektrische Feld kann folglich auch geschrieben werden als

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi_P$$

mit dem Potential Φ_P .

Wollen wir eine Probeladung innerhalb des Feldes verschieben, müssen wir die Arbeit

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{s} = q \int_1^2 \vec{E} d\vec{s} = q(\Phi_1 - \Phi_2)$$

verrichten. Diese Potentialdifferenz wird auch als Spannung U bezeichnet. Damit bekommen wir eine etwas hübschere Form der vorherigen Gleichung:

$$W = qU \tag{1}$$

¹So lange keine zeitlich veränderlichen Elektromagnetischen Felder vorliegen.

2.3 Das Gauß'sche Gesetz

Um die folgenden Betrachtungen zu vereinfachen, führen wir eine neue Größe, den elektrischen Fluss Φ durch eine Fläche A , mittels

$$\Phi = \int_A \vec{E} d\vec{A}$$

ein. Betrachten wir nun eine geschlossene Kugelfläche des Radius R um eine Punktladung Q , so ergibt sich

$$\begin{aligned} \Phi &= \oint_A \vec{E} d\vec{A} \text{ mit dem radialen Einheitsvektor } \vec{e}_r \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \oint_A d\vec{A} \frac{\vec{e}_r}{R^2} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \cdot R^2} \oint_A dA \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \cdot R^2} \cdot 4\pi R^2 \\ &= \frac{Q}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

Auf gleiche Weise können wir eine Fläche um einen ladungsfreien Raum betrachten:

$$\begin{aligned} \Phi &= \oint_A \vec{E} d\vec{A} \text{ ist mit dem Satz von GAUSS} \\ &= \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) dV \\ &= \int_V 0 dV \\ &= 0, \end{aligned}$$

da die Divergenz eines $\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}$ -Feldes immer 0 ist. Nun ist der Fluss additiv und damit gilt nun unabhängig von der Fläche um Q :

$$\Phi_A = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (2)$$

2.4 Der Plattenkondensator

Dieser besteht aus 2 gegenüberliegenden Platten, zwischen denen ein Dielektrikum liegt. In der Praxis gibt es ihn in den verschiedensten Ausführungen, angefangen von 2 großen runden Platten bis hin zu Wickelkondensatoren, die einige Dezimeter Plattenlänge durch Zusammenrollen der Platten, zwischen denen meist Papier liegt, auf kleinstem Raum unterbringen. Wir betrachten der Einfachheit halber aber 2 rechteckige, parallele Platten. Die Aussagen können aber ohne Probleme verallgemeinert werden.

Legt man nun zwischen den Platten eine Spannung U an, so trennt man die Ladung Q auf den Kondensatorplatten und erzeugt ein elektrisches Feld E zwischen ihnen. Nun ist im Allgemeinen der Abstand der Platten viel geringer, als ihre Fläche. Folglich herrscht im Inneren ein näherungsweise homogenes Feld. Betrachten wir

den Fluss durch eine Fläche A um eine der Platten, so ist mit GAUSS

$$\begin{aligned}\Phi_A &= E_{Innen} \cdot A = \frac{Q}{\varepsilon_0} \\ \Rightarrow E_{Innen} &= \frac{Q}{A \varepsilon_0}.\end{aligned}$$

Aus Gl. 2 und der Definition der Spannung $U = \int_C \vec{E}_{Innen} d\vec{x} = E \cdot d$, da E , wie gezeigt, konstant ist, folgt nun:

$$\begin{aligned}Q &= \varepsilon_0 \oint \vec{E} d\vec{A} \\ &= \varepsilon_0 \int_{Innen} \vec{E}_{Innen} d\vec{A} + \varepsilon_0 \int_{Aussen} \underbrace{\vec{E}_{Aussen}}_{=0} d\vec{A} \\ \Rightarrow Q &= \varepsilon_0 E \cdot A \text{ und mit } U = E \cdot d \text{ schließlich} \\ \frac{Q}{U} &= \frac{\varepsilon_0 \cdot A}{d} =: C\end{aligned}$$

C wird Kapazität genannt und ist offensichtlich kondensatorabhängig. Auffällig ist, dass die Kapazität, als das Vermögen Ladung zu speichern, mit der Fläche zu- und dem Abstand abnimmt. Möchte man nun die gespeicherte Energie berechnen, so betrachtet man die Arbeit, die nötig ist, um die Ladungen von einer Platte zur anderen durch das homogene Feld zu bewegen:

$$\begin{aligned}dW &= d dF = E d dQ = U dQ = \frac{Q}{C} dQ \\ E_{pot} = W_{ges} &= \frac{1}{C} \int_Q Q dQ = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} C U^2\end{aligned}$$

Damit kann nun sehr einfach die Kraft zwischen den beiden Platten berechnet werden:

$$F = -grad(E_{pot}) = -\frac{d(CU^2)}{2 dd} = -\frac{\varepsilon_0 A U^2}{2} \frac{d\frac{1}{d}}{dd} = \frac{\varepsilon_0 A U^2}{2d^2} \quad (3)$$

2.5 Transformator und Gleichrichter

Um eine hohe Spannung zu erzeugen, muss die 230V Netzspannung erst mit einem Transformator hochtransformiert werden. Der benötigt dazu wenige Windungen auf der Primär- und viele auf der Sekundärseite. Die erhaltene Wechselspannung kann nun mit Hilfe einer GRAETZbrücke gleichgerichtet werden. Dazu sind 4 Dioden so im Stern geschaltet, dass immer eine Halbwelle spannungsrichtig durchgelassen wird. Bildlich wird jede untere Halbwelle nach oben geklappt. Die dadurch erhaltene pulsierende Gleichspannung kann nun mit Hilfe von Kapazitäten, die bekanntlich die Spannungsänderung verzögern, geglättet werden.

3 Durchführung

3.1 Kirchhoffsche Potentialwaage

Um mit den bis hierhin erlangten theoretischen Vorkenntnissen die elektrische Feldkonstante ε_0 zu bestimmen, bedienen wir uns in diesem Versuch der KIRCHHOFFSCHEN Potentialwaage. Sie ist im wesentlichen eine Balkenwaage. Auf der einen

Seite ist nun ein variables Gewicht angebracht. An der anderen hängt die obere Platte eines Plattenkondensators. Unterhalb dieser befindet sich die zweite Platte in einem Abstand d , welcher durch eine Mikrometerschraube variiert werden kann. Legt man nun an beide Platten eine Spannung U an, so wirkt zwischen beiden Platten eine Kraft. Befindet sich die Waage im Gleichgewicht, so wird diese von der Gewichtskraft der, auf der anderen Seite der Waage hängenden, Masse m kompensiert. Mit der Fallbeschleunigung g und Gl. 3 können wir dieses Kräftegleichgewicht ausdrücken:

$$m g = \frac{\varepsilon_0 A}{2} \frac{U^2}{d^2} \quad (4)$$

Aus dieser Relation kann später die elektrische Feldkonstante ε_0 bestimmt werden.

Der verwendete Versuchsaufbau besteht aus kreisförmigen Kondensatorplatten mit dem Radius r . Auf Grund eines die Platte umgebenden Schutzringes der Höhe a , gibt es einen kleinen kapazitiven Effekt zwischen der Platte und dem Ring. Da geladene Körper immer in Richtung einer größeren Feldstärke gezogen werden, berücksichtigen wir den Effekt, indem wir die *effektive* Plattenfläche zu:

$$A = \pi(r^2 + ra) \quad (5)$$

berechnen. r ist der Radius der Platte und a die Höhe von Platte und Schutzring, zwischen denen sich der *kleine* Kondensator ergibt. Da der Effekt sehr gering ist, geht nur die Hälfte der zusätzlichen Fläche ein.

3.2 Messreihen

3.2.1 Konstante Kraft

In der ersten Messreihe werden zunächst Vergleichsmassen m (zwischen $1g$ und $3g$) fest gewählt. Somit bleibt die durch die Masse wirkende Kraft konstant. Für jede dieser Massen werden nun Spannungen U im Hochspannungsbereich ($2kV$ bis $5kV$) an die Platten angelegt. Dabei ist der Plattenabstand d zunächst relativ klein gewählt, was einer großen Kraft zwischen den Platten entspricht. Nun wird d über die Mikrometerschraube so lange vergrößert, bis die obere Kondensatorplatte angehoben wird. In diesem Fall überwiegt somit die Gewichtskraft der Masse m gegenüber der Kraft zwischen den Kondensatorplatten. Folglich stellt der Abstand, bei dem die Platte beginnt sich anzuheben, das geforderte Gleichgewicht dar. Der in dieser Situation eingestellte Plattenabstand d wird notiert.

3.2.2 Konstanter Plattenabstand

In der zweiten Messreihe werden nacheinander Plattenabstände d (Werte im einstelligen mm -Bereich) fest eingestellt. Für jeden Abstand werden nun verschiedene Massen m (zwischen $1g$ und $5g$) angehängt. Die Spannung U ist für eine große Kraftwirkung zunächst relativ hoch gewählt. Nun wird analog zur obigen Erhöhung von d die Spannung U verringert. Dadurch sinkt ebenfalls die zwischen den Platten wirkende Kraft. Das Kräftegleichgewicht ist wieder erreicht, wenn die obere Platte beginnt sich anzuheben. Die dann anliegende Spannung U wird notiert.

4 Auswertung

Bevor mit der eigentlichen Auswertung begonnen werden kann, wird zunächst die effektive Plattenfläche nach Gl. 5 berechnet. Dazu verwenden wir die Werte aus dem Praktikumsskript ($r = 40 \text{ mm}$, $a = 1 \text{ mm}$). Es wird weder für r noch für a ein Fehler angenommen, da sie auch im Praktikumsskript ohne dergleichen angegeben sind. Ihr relativer Fehler wird damit verschwindend gering gegenüber den anderen Werten sein. Wir erhalten:

$$A = 5,15 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \quad (6)$$

4.1 Konstante Kraft

Auf Grund von Gl. 4 erwarten wir bei konstanter Kraft mg einen linearen Zusammenhang zwischen dem Plattenabstand d und der Spannung U :

$$d = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 A}{2mg}} U$$

Somit können wir die Proportionalitätskonstante durch lineare Regression bestimmen. Da wir an der Mikrometerschraube nicht den wirklichen Plattenabstand sondern nur die Veränderung im Vergleich zum ursprünglich eingestellten Wert ablesen, verwenden wir für die Regression eine Gerade der Form

$$d = \alpha U + \beta \quad (7)$$

mit dem Nullwert des Abstandes β .

Bei der Regression ging der Fehler der gemessenen Größe d ein. Da die Justage der Mikrometerschraube nur sehr ungenau möglich war, wurde als Fehler ein Skalenteil angenommen. Der Fehler beträgt somit $\sigma_d = 10^{-5} \text{ m}$.

In Abb. 1 wurde für die verwendeten Massen m der Plattenabstand beim Kräftegleichgewicht gegen die Spannung U zusammen mit den Regressionsgeraden aufgetragen.

Nun identifizieren wir α mit der Proportionalitätskonstanten:

$$\alpha^2 = \frac{\varepsilon_0 A}{2mg}$$

Schließlich kann ε_0 bestimmt werden.

$$\varepsilon_0 = \alpha^2 \frac{2mg}{A}$$

Bei der Bestimmung des Fehlers von ε_0 wird nur α durch die Regression als fehlerbehaftet angenommen. Die so für die verschiedenen Gewichte erhaltenen Werte sind in Tab. 1 zusammengetragen.

Aus diesen Werten ergibt sich über den gewichteten Mittelwert:

$$\bar{\varepsilon}_0 = 8,7(3) \cdot 10^{-12} \text{ AsV}^{-1} \text{ m}^{-1}$$

4.2 Konstanter Plattenabstand

Ist der Plattenabstand d konstant, so erhalten wir aus Gl. 4 einen linearen Zusammenhang zwischen der Kraft mg und dem Quadrat der Spannung U^2 :

$$mg = \frac{\varepsilon_0 A}{2d^2} U^2$$

Da m als fehlerlos und U als fehlerbehaftet angenommen werden, tragen wir U^2 gegen mg auf und können so den Fehler in das Fitverfahren einfließen lassen. Die Proportionalitätskonstante wird erneut durch lineare Regression bestimmt. Hierfür verwenden wir diesmal eine Gerade der Form:

$$U^2 = \gamma mg$$

Bei der Regression ging der Fehler der Spannung U mit ein.

Die Messwerte samt der Regressionsgeraden sind in Abb. 2 aufgetragen.

Bevor nun die Proportionalitätskonstante mit γ identifiziert werden kann, ist es wichtig zu bemerken, dass sich ein systematischer Fehler von d auf die Steigung der Geraden auswirkt. Durch die lineare Regression im ersten Teil der Auswertung, konnte die Abweichung der gemessenen Größe d zum wirklichen Plattenabstand d' zu β (Gl. 7) bestimmt werden. Der gewichtete Mittelwert der so erhaltenen Werte (Tab. 1) ist:

$$\bar{\beta} = 0,08962(5) m$$

Somit setzen wird nun:

$$d' = d - \bar{\beta}$$

Der Fehler von d' ergibt sich über die Fehlerfortpflanzung durch die Fehler von d und $\bar{\beta}$. Der Fehler von d wird dabei wie im ersten Teil der Auswertung als $\sigma_d = 10^{-5} m$ angenommen.

Auf diese Weise erhalten wir für ε_0 :

$$\varepsilon_0 = \frac{2d'^2}{A\gamma}$$

Bei der Fehlerbetrachtung gingen hierbei die Ungenauigkeiten von d' und γ ein. Die berechneten Werte sind in Tab. 3 zu finden.

Der gewichtete Mittelwert ergibt sich zu:

$$\bar{\varepsilon}_0 = 8.7(3) \cdot e^{-12} AsV^{-1}m^{-1}$$

Hiermit kann nun über beide Messungen gemittelt werden, was

$$\bar{\varepsilon}_0 = 8.7(3) \cdot e^{-12} AsV^{-1}m^{-1}$$

ergibt.

5 Einordnung der Ergebnisse

Bei der Auswertung der Messungen mit konstanter Kraft ist zunächst erfreulich, dass der für die elektrische Feldkonstante ε_0 erhaltene Wert $\bar{\varepsilon}_0 = 8,7(3) 10^{-12} \text{ AsV}^{-1}\text{m}^{-1}$ (Gl. 8) sehr nahe am Literaturwert² von $\varepsilon_0 = 8,85 10^{-12} \text{ AsV}^{-1}\text{m}^{-1}$ liegt.

Betrachtet man die in Tab. 1 aufgeführten Größen genauer, so fällt auf, dass alle berechneten Werte in der Größenordnung des Literaturwerts liegen. Jedoch stimmt nur der Wert bei einer Masse von $2g$ auch vom Zahlenfaktor her mit dem Literaturwert überein. In Abb. 1 fällt zudem auf, dass die Steigung der Regressionsgeraden bei allen drei Messreihen nahezu gleich ist und alle drei Geraden die Ordinate in deutlich verschiedenen Punkten schneiden. Aus Gl. 7 geht jedoch hervor, dass die Steigung der Regressionsgeraden von der Masse m abhängt. Somit waren für unterschiedliche Massen auch unterschiedliche Steigungen zu erwarten. Diese Geraden sollten nun vom theoretischen Standpunkt aus die Ordinate in einem Punkt schneiden, welcher dann einem wirklichen Plattenabstand 0 mm entspricht. Dieses Verhalten ist im Graphen nicht zu sehen, da unsere Massen sehr klein waren und nur eine geringe Streuung aufwiesen. Daher ist die Skalierung der Ordinate recht groß und der Abstand der Achsenabschnitte scheint größer, als es die Rechnung schließlich ergibt.

Mit dem gemittelten wahren Abstand konnten die Werte aus Messung 2 zu einem Ergebnis verrechnet werden, das sehr erfreulich ist. Der Wert von ε_0 entspricht nicht nur exakt dem, der ersten Messung, sondern ihr Mittelwert liegt mit Fehler betrachtet auch nahe dem Tabellenwert.

²E. R. Cohen und B. N. Taylor: The 1986 CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants, J. Phys. Chem. Ref. Data, 17, 1795 – 1803 (1988)

A Tabellen und Grafiken

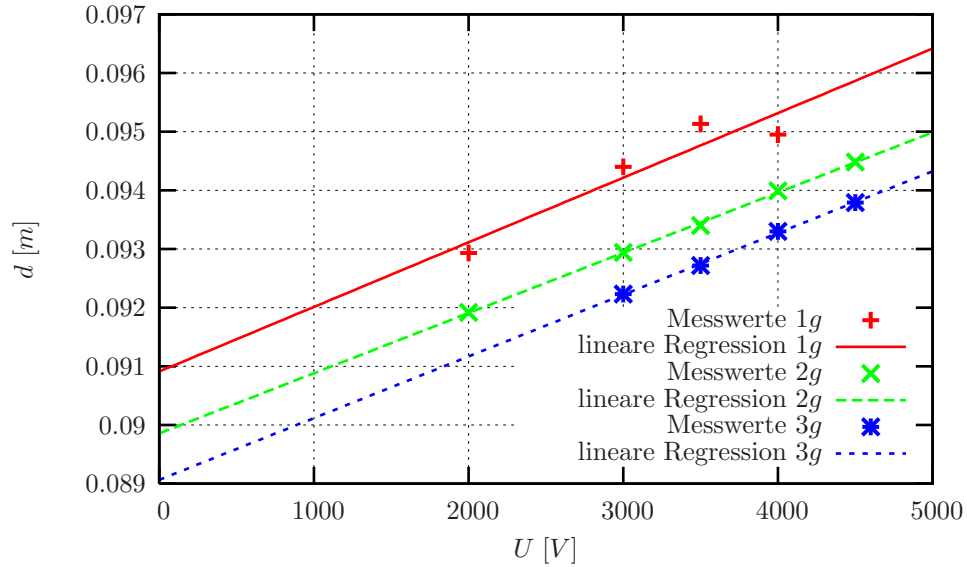


Abbildung 1: Nicht korrigierter Abstand d aufgetragen gegen die Spannung U bei konstanter Kraft mg

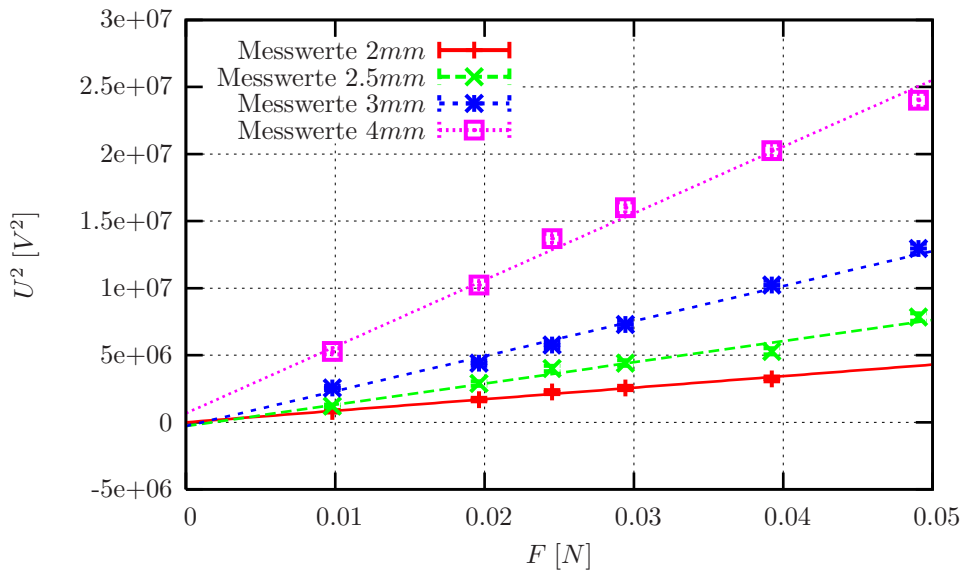


Abbildung 2: Das Quadrat der Spannung U^2 aufgetragen gegen die Kraft mg bei konstantem Plattenabstand d

m [kg]	α [$10^{-6} \sqrt{As^3V^{-1}kg^{-1}}$]	β [m]	ε_0 [$10^{-11}AsV^{-1}m^{-1}$]
0,001	1,1(3)	0,0909(9)	0,46(25)
0,002	1,03(2)	0,08985(6)	0,80(3)
0,003	1,05(3)	0,0890(1)	1,26(7)

Tabelle 1: Ergebnisse der ersten Messreihe bei konstanter Kraft mg

U^2 [V ²]	σ_{U^2} [V ²]	mg [N]	U^2 [V ²]	σ_{U^2} [V ²]	mg [N]
2 mm			2.5 mm		
810.00E+03	90.00E+03	9.81E-03	1.21E+06	110.00E+03	9.81E-03
1.69E+06	130.00E+03	19.62E-03	2.89E+06	170.00E+03	19.62E-03
2.25E+06	150.00E+03	24.53E-03	4.00E+06	200.00E+03	24.53E-03
2.56E+06	160.00E+03	29.43E-03	4.41E+06	210.00E+03	29.43E-03
3.24E+06	180.00E+03	39.24E-03	5.29E+06	230.00E+03	39.24E-03
0.00E-00	0.00E-00	0.00E-00	7.84E+06	280.00E+03	49.05E-03
3 mm			4 mm		
2.56E+06	160.00E+03	9.81E-03	5.29E+06	230.00E+03	9.81E-03
4.41E+06	210.00E+03	19.62E-03	10.24E+06	320.00E+03	19.62E-03
5.76E+06	240.00E+03	24.53E-03	13.69E+06	370.00E+03	24.53E-03
7.29E+06	270.00E+03	29.43E-03	16.00E+06	400.00E+03	29.43E-03
10.24E+06	320.00E+03	39.24E-03	20.25E+06	450.00E+03	39.24E-03
12.96E+06	360.00E+03	49.05E-03	24.01E+06	490.00E+03	49.05E-03

Tabelle 2: Daten der 2. Messung

d [m]	d' [m]	γ [VmA ⁻¹ s ⁻¹]	ε_0 [VmA ⁻¹ s ⁻¹]
0,0020	0.00138(5)	8.6(4)e+07	8.6(8)e-12
0,0025	0.00188(5)	1.6(1)e+08	8.6(7)e-12
0,0030	0.00238(5)	2.6(2)e+08	8.5(8)e-12
0,0040	0.00338(5)	5.0(2)+08	8.9(5)e-12

Tabelle 3: Ergebnisse der zweiten Messreihe bei konstantem Plattenabstand d und korrigiertem Abstand d'