

Physikalisches A-Praktikum

Versuch 12

Messung großer Widerstände

Praktikanten: Nils Kanning
Steffen Klemer
Durchgeführt am: 26.09.2006
Gruppe: 6
Assistent: Boris Landgraf

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
2	Theorie	5
2.1	Herkömmliche Messung von Widerständen	5
2.1.1	Messbereichserweiterung	5
2.1.2	Wheatstonesche Brückenschaltung	6
2.2	Messung großer Widerstände mit einem Kondensator	6
2.2.1	Lade- und Entladevorgang eines Kondensators	6
2.2.2	Der analoge Stromintegrator	7
2.2.3	Widerstandsbestimmung	9
2.3	Messungen an einem Schwingkreis	10
2.3.1	Grundlagen eines <i>RLC</i> -Schwingkreises	10
2.3.2	Bestimmung einer Kapazität	11
2.3.3	Bestimmung eines Widerstands	11
2.3.4	Bestimmung einer Induktivität	12
2.4	Funktionsweise von Hoch-, Tief-, und Bandpass	12
3	Durchführung	13
3.1	Schwingkreise	13
3.2	Ohmscher Widerstände	13
3.3	Kapazität	13
3.4	Aufgabenstellung	13
3.4.1	Eichung	14
3.4.2	Entladung	14
4	Auswertung	14
4.1	Schwingkreise	14
4.1.1	Erklärung der gemessenen Spannungsverläufe	14
4.1.2	Kapazität des Plattenkondensators	15
4.1.3	Betrag des unbekanntes Widerstandes	16
4.1.4	Induktivität der beiden Spulen	16
4.1.5	Theoretische Induktivität der Luftspule	17
4.2	Fehlende Auswertungsteile	17
4.2.1	Eichung	17
4.2.2	Theoretische Kapazität des Plattenkondensators	18
4.2.3	Entladen	18
4.2.4	Dielektrizitätskonstante	18
4.2.5	Isolationswiderstand	18
4.2.6	Der unbekanntes Widerstand	18

4

INHALTSVERZEICHNIS

5 Einordnung der Ergebnisse

19

A Tabellen und Grafiken

20

1 Einleitung

In diesem Versuch wird primär auf die Messung *großer Widerstände* und die sich dabei ergebenden Probleme eingegangen. Es werden zwei Methoden zur Bestimmung eines großen Widerstandes diskutiert. Dabei findet bei einem Versuchsaufbau ein *Stromintegrator* Verwendung, welcher in diesem Zusammenhang auch erläutert wird. Die zweite Methode nutzt die Eigenschaften eines *Schwingkreises* aus und bietet neben der Widerstandsbestimmung auch die Möglichkeit Kapazitäten und Induktivitäten zu bestimmen.

2 Theorie

2.1 Herkömmliche Messung von Widerständen

Gewöhnlich schalten wir zur Messung des Stroms I , der durch einen Widerstand R fließt, ein Amperemeter in Reihe zu diesem Widerstand. Dabei muss der Innenwiderstand des Messgeräts möglichst klein sein um den Stromfluss in der untersuchten Schaltung nicht zu stören. Zur Messung der Spannung U verwenden wir ein Voltmeter, welches parallel zum Widerstand geschaltet wird. Hier wird ein möglichst großer Innenwiderstand verwendet. Aus diesen beiden Größen können wir nun mit dem *ohmschen Gesetz* den Widerstand bestimmen:

$$R = \frac{U}{I}$$

Sollen mit diesem Verfahren sehr große Widerstände bestimmt werden, treten Probleme auf.

Zunächst können nur Ströme ab einer gewissen Größenordnung gemessen werden. Dies impliziert, dass bei einem großen Widerstand auch eine große Spannung angelegt werden muss um einen messbaren Strom zu erzeugen. Auf Grund der großen Spannungen kommt es nun zu großen elektrischen Feldern, die die Messung beeinträchtigen können. Dies kann zu großen Messfehlern führen. Beispielsweise kann Luft ionisiert werden und somit die Strommessung verfälschen.

2.1.1 Messbereichserweiterung

Analoge Ampere- sowie Voltmeter haben einen festen Messbereich. Sollen jedoch Ströme gemessen werden, die außerhalb dieses Messbereichs liegen, so kann parallel zum Amperemeter ein weiterer Widerstand R_v geschaltet werden. Dadurch fließt ein Teil des Stroms durch diesen Widerstand und der Anteil des Stroms, welcher durch das Amperemeter fließt, liegt bei einem ausreichend kleinen R_v wieder im Messbereich. Mit einem Innenwiderstand des Amperemeters R_i und einem abgelesenen Strom I_i ergibt sich für den tatsächlichen Stromfluss I :

$$I = \left(1 + \frac{R_i}{R_v}\right) I_i$$

Analog hierzu schaltet man bei der Spannungsmessung einen Vorwiderstand R_v mit dem Voltmeter in Reihe. Dadurch wird die tatsächlich am Voltmeter abfallende Spannung U_i reduziert. Mit dem Innenwiderstand R_i des Voltmeters ergibt sich so für die tatsächliche Spannung U :

$$U = \left(1 + \frac{R_v}{R_i}\right) U_i$$

2.1.2 Wheatstonesche Brückenschaltung

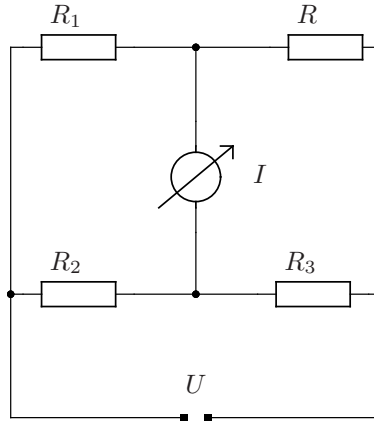


Abbildung 1: WHEATSTONESche Brückenschaltung zur Bestimmung von R

Auch mit der bereits im *Versuch 9 – Diffusion* diskutierten und in Abb. 1 gezeigten WHEATSTONESchen Brückenschaltung können große Widerstände bis zu einem gewissen Ausmaß gut bestimmt werden. Der Vorteil liegt darin, dass nur ein Nullabgleich durchgeführt werden muss und der Innenwiderstand des Messgeräts keine Rolle spielt. Für eine abgeglichenen Schaltung, also $I = 0$, kann die Größe eines Widerstands R aus drei bekannten Widerständen berechnet werden:

$$R = R_3 \frac{R_2}{R_4}$$

Liegt an der Schaltung eine Wechselspannung $U(t)$ an, so gilt eine analoge Beziehung auch für den Quotienten aus momentaner Spannung und Stromstärke — die *Impedanz* Z eines Bauteils:

$$Z = Z_3 \frac{Z_2}{Z_4}$$

2.2 Messung großer Widerstände mit einem Kondensator

2.2.1 Lade- und Entladevorgang eines Kondensators

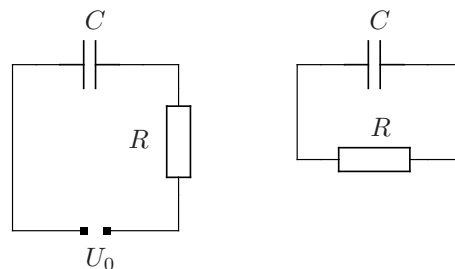


Abbildung 2: Schaltung zum Laden eines Kondensators (links) und RC -Kreis (rechts)

In Abb. 2 ist eine Schaltung zum Aufladen eines Kondensators C über einen Widerstand R abgebildet. Nach der Maschenregel gilt bei einer konstanten Ladespannung U_0 :

$$U_0 = U_R(t) + U_C(t) = RI(t) + \frac{1}{C} \int I(t)dt$$

Bei einem anfänglichen Ladestrom $I_0 = U_0/R$ hat die Lösung dieser Differentialgleichung die Form:

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{1}{RC} \cdot t}$$

Für den Spannungsverlauf am Kondensator ergibt sich hieraus:

$$U_c(t) = U_0(1 - e^{-\frac{1}{RC} \cdot t})$$

Nun wird der Entladevorgang eines Kondensators betrachtet. Abb. 2 zeigt einen RC -Kreis. Dabei ist der Kondensator zunächst geladen. An ihm liegt eine Spannung $U_0 = RI_0$ an. Der Spannungsverlauf lässt sich nun erneut durch die Maschenregel als Differentialgleichung ausdrücken:

$$0 = U_R(t) + U_C(t) = RI(t) + \frac{1}{C} \int I(t)dt$$

Die Lösung ist identisch zum oben diskutierten Fall:

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{1}{RC} \cdot t}$$

Auf Grund des Nichtvorhandenseins einer externen Spannungsquelle nimmt nun jedoch die Kondensatorspannung U_c mit der Zeit ab:

$$U_c(t) = U_0 e^{-\frac{1}{RC} \cdot t} \quad (1)$$

2.2.2 Der analoge Stromintegrator

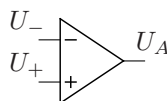


Abbildung 3: Analoger Operationsverstärker

Abb. 3 zeigt einen analogen Operationsverstärker. Der Übersicht halber sind die Betriebsspannungsanschlüsse (von meist 15V) nicht eingezeichnet. Für kleine Beträge der Differenz der Eingangsspannungen U_- und U_+ verstärkt dieser diese Differenz um einen Faktor A und invertiert sie:

$$U_A = -A(U_- - U_+)$$

Dabei hat ein *idealer Operationsverstärker* einen unendlich hohen Eingangswiderstand R_E und keinen Ausgangswiderstand R_A . Außerdem strebt der Verstärkungsfaktor A ebenfalls gegen unendlich und, falls keine Differenz der Eingangsspannungen vorliegt, liegt auch am Ausgang keine Spannung an.

Dieser Operationsverstärker findet nun in der in Abb. 4 gezeigten Schaltung Verwendung. Dabei ist nun ein Eingang des Operationsverstärkers mit der Erde verbunden.

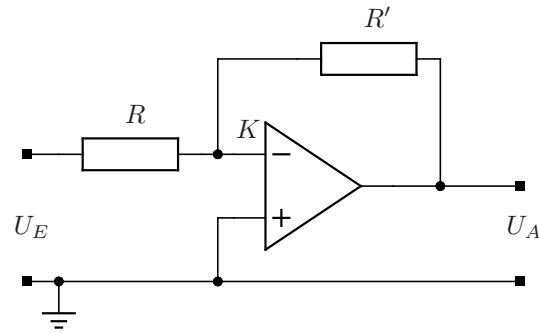


Abbildung 4: Schaltung mit einem Operationsverstärker

Vor dem anderen Eingang befindet sich ein Vorwiderstand R . Über einen weiteren Widerstand R' wird der Ausgang mit diesem Eingang rückgekoppelt. Somit gilt:

$$U_A = -A(U_- - U_+) = -AU_-$$

Berücksichtigt man nun, dass A gegen unendlich strebt, so erhält man:

$$U_- = -\frac{U_A}{A} = 0$$

Damit liegt praktisch auch U_- auf der Erde. Zusammen mit der Knotenregel im Punkt K und einem Eingangsstrom $I_E = 0$, wegen des unendlichen Eingangswiderstands R_E , ergibt sich also:

$$0 = I_E + I_R + I_{R'} = I_R + I_{R'} = \frac{U_E}{R} + \frac{U_A}{R'} \quad (2)$$

Damit besteht eine Beziehung zwischen der Eingangsspannung U_E und der Ausgangsspannung U_A :

$$U_A = -\frac{R'}{R} U_E$$

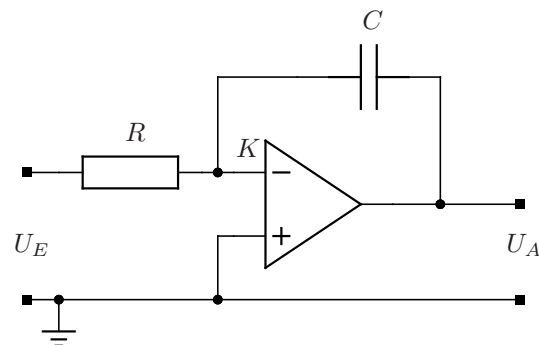


Abbildung 5: Analoger Stromintegrator

Im Fall des Stromintegrators wird nun der Widerstand R' durch einen Kondensator C ersetzt (siehe Abb. 5). In diesem Fall lässt sich der durch den Kondensator fließende Strom durch die Spannungsänderung ausdrücken. Gl. 2 geht über in:

$$0 = I_R + I_C = \frac{U_E}{R} + C \frac{dU_A}{dt}$$

Somit erhält man schließlich durch Integration und unter Verwendung der Tatsache, dass falls $U_E = 0$ auch $U_A = 0$, die Beziehung:

$$U_A = -\frac{1}{RC} \int U_E dt = -\frac{1}{C} \int I_R dt$$

Das Integral über den Strom ist die, durch den Widerstand R geflossene, Ladung:

$$U_A = -\frac{1}{C} \int I_R dt = -\frac{Q}{C} \quad (3)$$

Somit stellt der Stromintegrator durch die zeitliche Aufsummation des Stroms ein Hilfsmittel zur Ladungsmessung dar.

In der Praxis wird auf der Anzeige des Integrator nicht direkt die geflossene Ladung angezeigt. Stattdessen ist der angezeigte Skalenwert S proportional zur Ausgangsspannung U_A und damit zur Ladung Q . Durch Eichung mit definierten Stromimpulsen kann nun die Proportionalitätskonstante bestimmt werden. Danach kann der Stromintegrator zur tatsächlichen Ladungsmessung eingesetzt werden.

2.2.3 Widerstandsbestimmung

Um einen großen unbekanntem Widerstand R_X bestimmen zu können wird der bereits oben diskutierte Entladevorgang eines Kondensators über einen Widerstand R betrachtet. Gl. 1 kann auch durch die Ladung des Kondensator $Q(t)$ ausgedrückt werden:

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{1}{RC} \cdot t} \quad (4)$$

Misst man die verbleibenden Ladungen zu verschiedenen Zeiten t_1 und t_2 , so kann der Widerstand R bestimmt werden:

$$R = \frac{1}{C} \frac{t_2 - t_1}{\log(Q_1) - \log(Q_2)} \quad (5)$$

Zunächst wird der zu bestimmende Widerstand R_X noch nicht verwendet. In diesem Fall ist $R = R_{iso}$ der Isolationswiderstand des Kondensators.

Ist dieser bestimmt, so wird R_X parallel zum Kondensator geschaltet. Dann ist:

$$R = \frac{R_{iso} + R_X}{R_{iso} R_X}$$

Da R_{iso} schon bekannt ist, kann so R_X bestimmt werden.

Zur Messung der nach der Zeit t auf dem Kondensator verbliebenen Ladung $Q(t)$ wird der oben beschriebene Stromintegrator verwendet. Dieser wird nach der Zeit t parallel zum Kondensator geschaltet und der Kondensator dadurch über den ohmschen Widerstand des Integrators entladen.

Bei dieser Methode wird vernachlässigt, dass nicht die gesamte Entladung über diesen Widerstand abläuft. Ein Teil der Ladung fließt auch über den Isolationswiderstand R_{iso} und gegebenenfalls den unbekanntem Widerstand R_X ab. An dieser Stelle wird deutlich, dass diese Methode somit nur bei großen Widerständen verwendet werden kann. In diesem Fall ist der Stromfluss durch R_{iso} und R_X vernachlässigbar. Der Begriff "groß" bedeutet hier also groß gegenüber dem ohmschen Widerstand des Stromintegrators.

2.3 Messungen an einem Schwingkreis

2.3.1 Grundlagen eines RLC -Schwingkreises

Um zu einer Differentialgleichung, welche das Verhalten des RLC -Schwingkreises beschreibt, zu gelangen, betrachten wir zunächst die an den Komponenten anliegenden Spannungen. Liegt zusätzlich noch eine äußere Spannung $U_{ext}(t)$ an, so erhalten wir:

$$U_{ext}(t) + U_L(t) = U_C(t) + U_R(t)$$

Somit gilt weiter:

$$U_{ext}(t) = U_C(t) + U_R(t) - U_L(t) = \frac{Q(t)}{C} + RI(t) + L\dot{I}$$

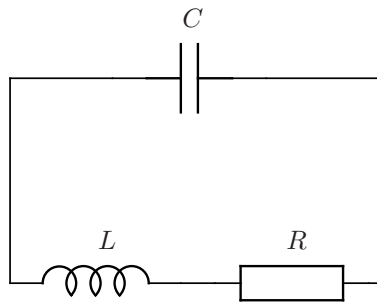


Abbildung 6: RLC -Schwingkreis

In Folgenden werden wir nun den homogenen Fall dieser Differentialgleichung betrachten. Somit liegt keine externe Spannung an (Abb. 6). Drücken wir nun die Stromstärke I durch die Ladung Q aus, so erhalten wir:

$$0 = \ddot{Q}(t) + \frac{R}{L}\dot{Q}(t) + \frac{1}{LC}Q(t) \quad (6)$$

Diese Gleichung ist analog zu der bereits in *Versuch 1 – Der Pohlsche Resonator* behandelten Differentialgleichung einer gedämpften harmonischen Schwingung. Mit den Substitutionen $\beta = R/2L$ und $\omega_0^2 = 1/LC$ können wir Gl. 6 nun schreiben als:

$$0 = \ddot{Q} + 2\beta\dot{Q} + \omega_0^2 Q$$

Im Folgenden werden wir uns auf den Schwingfall ($\beta^2 < \omega_0^2$) konzentrieren. In diesem Fall ist die Lösung der Gleichung periodisch. Die Frequenz ω beträgt:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Für das logarithmische Dekrement Λ ergibt sich mit $\omega = 2\pi/T$:

$$\Lambda = \beta T = \frac{R}{2L}T \quad (7)$$

2.3.2 Bestimmung einer Kapazität

Zur Bestimmung einer Kapazität C wird parallel zu einem geladenen Kondensator ein Oszilloskop mit einem Eingangswiderstand R_{Oszi} geschaltet und der Kondensator darüber entladen. Der Spannungsverlauf ist nach Gl. 1:

$$U_C(t) = U_0 e^{-\frac{1}{R_{Oszi}C} \cdot t}$$

Trägt man $U_C(t)/U_0$ logarithmisch gegen die Zeit auf, so entspricht die Steigung γ_1 der sich ergebenden Geraden:

$$\gamma_1 = \frac{1}{R_{Oszi}C} \quad (8)$$

Nun wird ein bekannter Widerstand R parallel zum Kondensator geschaltet und der Versuch wiederholt. Der Gesamtwiderstand R_{ges} über den der Kondensator entladen wird, ist nun:

$$\frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{R_{Oszi}} + \frac{1}{R}$$

Auch jetzt wird $U_C(t)/U_0$ logarithmisch gegen die Zeit aufgetragen. Diesmal ist die Steigung γ_2 der sich ergebenden Geraden:

$$\gamma_2 = \frac{1}{R_{ges}C}$$

Daraus kann der Innenwiderstand des Oszilloskops bestimmt werden:

$$R_{Oszi} = R \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} - 1 \right) \quad (9)$$

Nun kann schließlich mit Gl. 8 die gesuchte Kapazität ermittelt werden:

$$C = \frac{1}{R_{Oszi}\gamma_1} \quad (10)$$

2.3.3 Bestimmung eines Widerstands

Um einen unbekanntem Widerstand R_X mit Hilfe eines Schwingkreises zu bestimmen, wird dieser parallel zu einem Kondensator C geschaltet und die Spannung beim Entladen des Kondensators erneut mit einem Oszilloskop aufgezeichnet. Verwendet man wieder die logarithmische Darstellung, so beträgt die Steigung γ_3 der sich ergebenden Geraden nun:

$$\gamma_3 = \frac{1}{R_{ges}C}$$

Dabei ist der Gesamtwiderstand R_{ges} :

$$\frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{R_{Oszi}} + \frac{1}{R_X}$$

Somit lässt sich nun der Widerstand R_X bestimmen:

$$R_X = \frac{R_{Oszi}}{\gamma_3 C R_{Oszi} - 1}$$

2.3.4 Bestimmung einer Induktivität

Zur Bestimmung einer Induktivität L kann nun der oben bereits diskutierte RLC -Schwingkreis verwendet werden. Erneut wird der, diesmal oszillierende, Spannungsverlauf mit einem Oszilloskop bestimmt. Da die Spannung proportional zur Ladung ist, kann das logarithmische Dekrement Λ aus dem Spannungsverlauf bestimmt werden. Gleiches gilt für die Periodendauer T . Mit Hilfe der Beziehungen $\omega^2 + \beta^2 = \omega_0^2 = 1/LC$ und $\beta^2 = \Lambda^2/T^2$ kann nun die Induktivität L berechnet werden:

$$L = \frac{T^2}{C(4\pi^2 + \Lambda^2)} \quad (11)$$

Aus aus Gl. 7 kann nun auch der ohmsche Widerstand der Schaltung R bestimmt werden. Dies ist in diesem Fall der ohmsche Widerstand der realen Spule $R = R_L$:

$$R_L = \frac{2L\Lambda}{T} \quad (12)$$

2.4 Funktionsweise von Hoch-, Tief-, und Bandpass

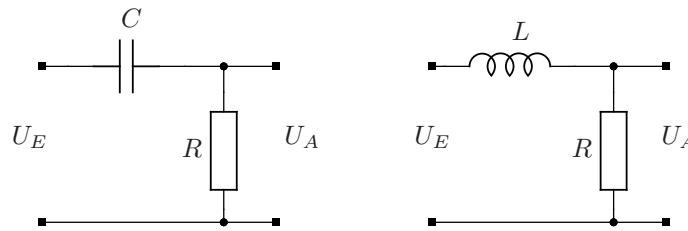


Abbildung 7: Hochpass (links) und Tiefpass (rechts)

Bei einem Hochpass handelt es sich um eine Schaltung, die hohe Frequenzen passieren lässt, niedrige dagegen unterdrückt bzw. rausfiltert. Wie in Abb. 7 zu sehen ist, wird ein Hochpass durch einen Kondensator C und einen Widerstand R realisiert. Durch die Betrachtung des Stroms durch den Widerstand R gelangt man zu einer Beziehung zwischen der komplexen Eingangsspannung \hat{U}_E und der ebenfalls komplexen Ausgangsspannung \hat{U}_A :

$$\hat{U}_A = \frac{R}{R + \frac{1}{i\omega C}} \hat{U}_E$$

Für die reellen Größen bedeutet dies:

$$U_A = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} U_E$$

An dieser Gleichung erkennt man nun deutlich das bereits oben geschilderte Verhalten eines Hochpasses. Strebt ω gegen 0, so ist auch die Ausgangsspannung U_A minimal. Wird ω hingegen groß, so strebt U_A gegen U_E .

Ganz analog funktioniert ein Tiefpass (siehe Abb. 7). Hierbei werden jedoch hohe Frequenzen unterdrückt. Bei der Realisation wird nun an Stelle eines Kondensators eine Induktivität L verwendet. Damit verändern sich die charakteristischen Gleichungen zu:

$$\hat{U}_A = \frac{R}{R + i\omega L} \hat{U}_E$$

Mit reellen Größen ist dies:

$$U_A = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} U_E$$

Um nun sowohl hohe als auch tiefe Frequenzen zu unterdrücken, können Hochpass und Tiefpass hintereinander geschaltet werden. In diesem Fall gibt es eine, durch den jeweiligen Hoch- und Tiefpass fest definierte, Frequenz, bei der die Dämpfung minimal ist. Eine solche Schaltung wird auch als Bandpass bezeichnet. Analog sind auch Tiefpässe mit R und C, wobei der Kondensator parallel zum Ausgang liegt, und Hochpässe mit Spule und Widerstand möglich. Für steilere Kennlinien und damit schärfere Filter bieten sich auch Pässe nur aus Spule und Kondensator an. Es gilt einen Kompromiss zwischen der Komplexität der Schaltung und der erzielten Filterung zu finden.

3 Durchführung

3.1 Schwingkreise

Mit einem Digitaloszilloskop wurde die Spannungs-Zeit-Kurve über dem Kondensator bei Aufladung mit dem Impulsgenerator aufgenommen. Es gab folgende Einzelmessungen:

- Impulsgenerator alleine
- Impulsgenerator mit Plattenkondensator
- Plattenkondensator mit $2M\Omega$ Widerstand parallel
- Plattenkondensator mit unbekanntem R_x parallel
- Plattenkondensator mit Drosselspule parallel
- Plattenkondensator mit Luftspule parallel
- Kommerzieller Kondensator mit $2M\Omega$ Widerstand parallel

3.2 Ohmscher Widerstände

Mit einem Digitalmultimeter wurden die Ohmschen Widerstände von Drosselspule, Luftspule, $2M\Omega$ -Widerstand, Plattenkondensator und dem unbekanntem Widerstand R_x bestimmt.

3.3 Kapazität

Mit dem gleichen Digitalmultimeter wurden die Kapazität des Plattenkondensator sowie eines Folienkondensators bestimmt.

3.4 Aufgabenstellung

Laut Aufgabenstellung sollten ursprünglich noch die folgenden Messungen durchgeführt werden, was aufgrund einer Unverträglichkeit der jüngst gestarteten DVB-T Sender mit dem Halbleiterstromintegrator nicht getan werden konnte. Eine Messung mit dem zur Verfügung stehenden Galvanometer scheiterte am Elan der messenden Studenten.

3.4.1 Eichung

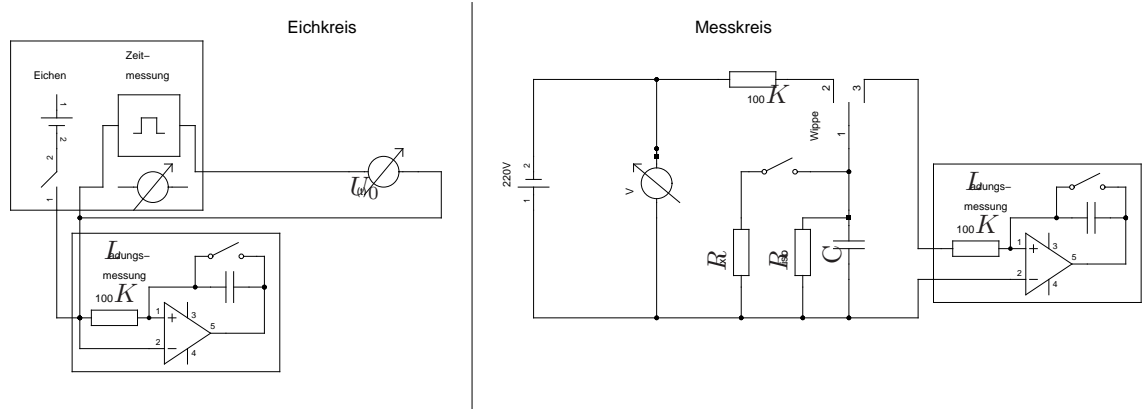


Abbildung 8: Schema des Versuchsaufbaus

Die Messung erfolgte nach Abb. 8. Zuerst wurde das Ladungsmessgerät mit Hilfe des Eichgenerators und des Oszilloskops in 5 verschiedenen Messungen nach Gl. 3 kalibriert, also die Proportionalitätskonstante bestimmt.

3.4.2 Entladung

Diese Messung teilte sich in 3 Teile:

- Der Kondensator C wurde fünf mal auf 220V geladen und sofort über den Messkreis entladen
- Der Widerstand R_x wird dazugeschaltet, der Kondensator geladen und nach 0, 2, 4, ..., 10, 20, 30, 60s die Ladung im Kondensator gemessen. Für jede Messung wurde der Kondensator neu geladen.
- Zur Bestimmung des Isolationswiderstandes R_{iso} wird die vorherige Messung ohne R_x und mit den Zeiten 0, 1, 2, 5, 10min wiederholt.

4 Auswertung

4.1 Schwingkreise

Die aufgenommenen Bilder sind, verglichen mit denen im Buch invertiert. Wir haben praktisch negative Spannungen gemessen.

4.1.1 Erklärung der gemessenen Spannungsverläufe

4.1.1.1 Impulsgenerator alleine Wie erwartet bekommen wir recht saubere Nadelimpulse. Die kleinen abfallenden *Zacken* sind auf das Entladen des Kondensators im Generator zurückzuführen, der nicht unendlich steile Abfall ebenso.

4.1.1.2 Impulsgenerator mit Plattenkondensator Der Kondensator entlädt sich als Antwort auf eine Nadelspitze exponentiell. Hierbei kommt durch die geringe Auflösung des Oszilloskops (welche bereits maximal eingestellt war) leider nur ein linearer Abfall heraus.

4.1.1.3 Plattenkondensator mit $2M\Omega$ Widerstand parallel Durch den Widerstand entlädt sich der Kondensator schneller als im vorherigen Versuch, da $R_{2M} \parallel R_{Osz} < R_{Osz}$ und damit die Stromstärke größer ist.

4.1.1.4 Plattenkondensator mit unbekanntem R_x parallel Da der Widerstand R_x deutlich größer ist als $2M\Omega$, liegt die Kurve zwischen den beiden vorherigen Versuchen.

4.1.1.5 Plattenkondensator mit Drossel- bzw. Luftspule parallel Beide Graphen zeigen abklingende harmonische Schwingungen, wie aus dem Aufbau als Schwingkreis auch zu erwarten war. Das Abklingen mit der Luftspule verläuft wesentlich schneller, da mit Gl. 7 die Abklingzeit von der Induktivität abhängt.

4.1.1.6 Kommerzieller Kondensator mit $2M\Omega$ Widerstand parallel Der Graph gleicht sehr dem aus der 2. Messung, was den Schluss nahe legt, dass beide Kondensatoren eine ähnliche Kapazität haben, wie auch aus der Messung mit dem Multimeter hervorgeht.

4.1.2 Kapazität des Plattenkondensators

Aus Messung 2 und 3 erhalten wir analog zu Kapitel 2.3.2 über einen linearen Fit der logarithmierten Spannung gegen die Zeit (Abb. 9) zwei Faktoren:

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= -110(4) \frac{1}{\Omega F} \\ \gamma_2 &= -179(5) \frac{1}{\Omega F}.\end{aligned}$$

Mit diesen berechnet sich der Widerstand des Oszilloskops via Gl. 9 zu

$$R_{Osz} = 1,3(2) M\Omega$$

Der Fehler resultiert aus dem Gesetz der Fehlerfortpflanzung mit den beiden Fehlern der Proportionalitätskonstanten und einem Fehler des durch eine Multimetermessung bestimmten $2M\Omega$ -Widerstands.

Daraus erhalten wir schließlich mit Gl. 10 die gesuchte Kapazität

$$C = 6,7(8) nF.$$

Ähnlich ergibt sich die Kapazität des kommerziellen Kondensators mit Hilfe des Fits in Abb. 10. Die Proportionalitätskonstante $\gamma_{Kommerz}$ ist nun:

$$\gamma_{Kommerz} = \frac{1}{R_{ges} C_{Kommerz}}$$

Der Gesamtwiderstand R_{ges} setzt sich hier aus einer Parallelschaltung des $2M\Omega$ -Widerstands und des Innenwiderstand des Oszilloskops zusammen. Mit diesen Informationen ergeben sich die Zahlenwerte:

$$\begin{aligned}\gamma_{Kommerz} &= -196(5) \frac{1}{\Omega F} \\ C_{Kommerz} &= 1,4(4)nF.\end{aligned}$$

4.1.3 Betrag des unbekanntes Widerstandes

Um den unbekanntes Widerstand R_x zu bestimmen, könnte man ähnlich wie im vorherigen Auswertungsschritt vorgehen. Aus der Messung des Spannungsverlaufs mit dem Plattenkondensator und R_x bestimmt man eine Proportionalitätskonstante γ_3 :

$$\gamma_3 = \frac{1}{R_{ges}C}$$

Dabei ist nun:

$$\frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{R_{Osz}} + \frac{1}{R_x}$$

Mit der bereits bekannten Konstante γ_1 folgt dann ganz analog zur vorherigen Auswertung:

$$R_x = \frac{R_{Osz}}{\frac{\gamma_3}{\gamma_1} - 1}$$

Mit einem sehr großen Widerstand R_x fließt durch diesen nur ein sehr geringer Strom. Damit ist die Situation fast so, als ob der parallel geschaltete Widerstand R_x nicht vorhanden ist. Damit erwarten wir, dass für die Konstante γ_3 gilt $\gamma_3 \approx \gamma_1$.

Also betrachten wir die Funktion $R_x(\gamma_3)$ in der Nähe der Polstelle bei $\gamma_3 = \gamma_1$. In diesem Bereich ändert sich die Funktion jedoch sehr stark und so führen schon kleine Messungenauigkeiten zu extrem großen Fehlern.

Da sich bei der Multimetermessung herausstellte, dass es sich bei R_x um einen sehr großen Widerstand in einer Größenordnung von über $40 M\Omega$ handelt, verzichten wir an dieser Stelle auf eine Bestimmung dieses Widerstands nach der eben vorgestellten Methode.

4.1.4 Induktivität der beiden Spulen

Die Periodendauern der Schwingungen ergeben sich durch Mittlung über mehrere Perioden zu:

$$\begin{aligned}T_{Drossel} &= 1,41(3) 10^{-3} s \\ T_{Luft} &= 56,7(8) 10^{-6} s\end{aligned}$$

Für jeweils zwei dem Ausdruck des Oszilloskops entnommene Maxima berechnen wir das logarithmische Dekrement nach der Formel:

$$\Lambda = -\ln\left(\frac{U(t+T)}{U(t)}\right)$$

Durch Bilden des gewichteten Mittels der so berechneten Werte erhalten wir:

$$\begin{aligned}\Lambda_{Drossel} &= 0.34(2) \\ \Lambda_{Luft} &= 0.28(2).\end{aligned}$$

Dabei wurde bei den Spannungen an der Drosselspule ein Fehler von $5V$ und bei jenen an der Luftspule ein Fehler von $2V$ angenommen.

Aus diesen beiden Werten ergibt sich schließlich mit Gl. 11 die gesuchte Induktivität

$$\begin{aligned}L_{Drossel} &= 11(3)H \\ L_{Luft} &= 0,018(5)H.\end{aligned}$$

Für die Kapazität des Kondensators wurde der Wert der Messung mit dem Multimeter $C = 4400(1100) 10^{-12} F$ verwendet.

Als Bonus liefert uns dies über Gl. 12 den Ohmschen Widerstand der Spulen:

$$\begin{aligned}R_{Drossel} &= 5400(1500)\Omega \\ R_{Luft} &= 180(48)\Omega\end{aligned}$$

4.1.5 Theoretische Induktivität der Luftspule

Von der Luftspule sind die Daten mit $l = 1.000(5)m$, $n = 2800$ sowie $d = 0.052(2)m \Rightarrow A = 8.5(2) \cdot 10^{-3}m^2$ bekannt. Daher kann ihre theoretische Induktivität berechnet werden:

$$L = \mu_0 A l \left(\frac{n}{l}\right)^2 = 0.020(2)H. \quad (13)$$

Der Fehler resultiert aus der Fehlerfortpflanzung.

Damit weicht der theoretische Wert um etwa 10% vom zuvor in Gl. 13 berechneten Wert ab.

4.2 Fehlende Auswertungsteile

Wie bereits in der Durchführung geschrieben, konnten nicht alle Messungen durchgeführt werden, weshalb auch einige Auswertungsteile nicht vorgenommen werden konnten. Diese finden sich mit Platzhalterwerten im Folgenden.

4.2.1 Eichung

Die 5 gemessenen Spannungswerte wurden in Abb. ?? gegen die bekannten Ladungen $Q = U/R \cdot \Delta t$ aufgetragen und linear über $U = mQ + n$ gefittet. Dies ergab einen Anstieg von

$$m = 000 \frac{V}{C}.$$

4.2.2 Theoretische Kapazität des Plattenkondensators

Mit den, im Praktikumsskript gegebenen, Werten beträgt die Kapazität des Kondensators

$$C_p = (n-1)\varepsilon_0\varepsilon_r \left(\frac{\pi r^2}{d} + r \cdot \left[\ln \left(\frac{16\pi r}{d} \right) - 1 \right] \right) \quad (14)$$

Der verwendete Plattenkondensator hatte Luft mit einem $\varepsilon_r = 1$ als relative Dielektrizitätskonstante. Zusammen mit $n = 65$, $d = 0,5\text{cm}$ und $r = 10\text{cm}$ bekommen wir

$$C_{p_{theorie}} = 3.8955539\text{nF}$$

4.2.3 Entladen

4.2.4 Dielektrizitätskonstante

Aus der ersten Messung können wir mittels

$$\begin{aligned} C_p &= \frac{Q}{U} = \frac{\bar{Q}}{220\text{V}} = \frac{000\text{C}}{220\text{V}} \\ C_p &= 000() \end{aligned}$$

die Dielektrizitätskonstante über Gl. 14 bestimmen:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \frac{C_p}{(n-1) \left(\frac{\pi r^2}{d} + r \cdot \left[\ln \left(\frac{16\pi r}{d} \right) - 1 \right] \right)} \\ \varepsilon_0 &= 000 \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \end{aligned}$$

Das Fehlerintervall ergibt sich direkt aus dem Fehler von C_p über das Gesetz der Fehlerfortpflanzung. r und d sind im Praktikumsskript ohne Fehler angegeben, folglich wird dieser als marginal gegen die anderen betrachtet.

4.2.5 Isolationswiderstand

Die in Messung 2c erhaltenen Werte haben wir über den Proportionalitätsfaktor m in Ladungen umgerechnet und diese gegen die Zeit aufgetragen. Die erhaltenen Punkte wurden mit Gl. 4 über R gefittet, wobei wir die gemessene Kapazität C_p verwendeten. Da das zur Verfügung stehende Fitverfahren nur Fehler in einer Variablen zulässt, wurden die von Q großzügig aufgerundet. Eine Überschlagsrechnung mit Hilfe von Gl. 5 ergibt, dass der Fehler von C 000 vernachlässigbar ist.

Damit bekommen wir einen Widerstand

$$R_{iso} = 000\Omega.$$

4.2.6 Der unbekannte Widerstand

Auf dem gleichen Weg wie eben haben wir auch die Messung 2b ausgewertet, was einen Widerstand

$$R_{iso||x} = 000\Omega$$

ergibt. Mit Gleichung 6 bekommen wir daraus

$$R_x = 000\Omega$$

den unbekanntem Widerstand.

5 Einordnung der Ergebnisse

Die Oszilloskopausdrucke der Messungen mit dem Impulsgenerator zeigen recht eindrucksvoll die theoretisch beschriebenen Bilder, können also als kleiner Erfolg in der bisherigen Versuchsreihe 10-20 gewertet werden.

Beim Vergleich der mit dem Multimeter bestimmten Kapazitäten mit jener die in der Auswertung berechnet wurden fällt auf, dass lediglich die Größenordnungen übereinstimmen. Die deutlichen Abweichungen können leider auch nicht mit Ungenauigkeiten beim Ablesen der Oszilloskopausdrucke erklärt werden.

Außerdem ist auffällig, dass die Kapazität des Plattenkondensator in etwa der des sehr viel kleinen kommerziellen Kondensators gleicht. Dieses Phänomen kann durch eng gewickelte gegeneinander isolierte Folien und ein besseres Dielektrikum als Luft im kommerziellen Kondensator erreicht werden.

Um die berechneten Daten der Spulen genau einzuordnen fehlen uns leider in den meisten Fällen Referenzwerte. Sehr erfreulich ist jedoch die Übereinstimmung der aus den Messwerten berechneten Induktivität der Luftspule mit dem theoretisch vorhergesagten Wert.

A Tabellen und Grafiken

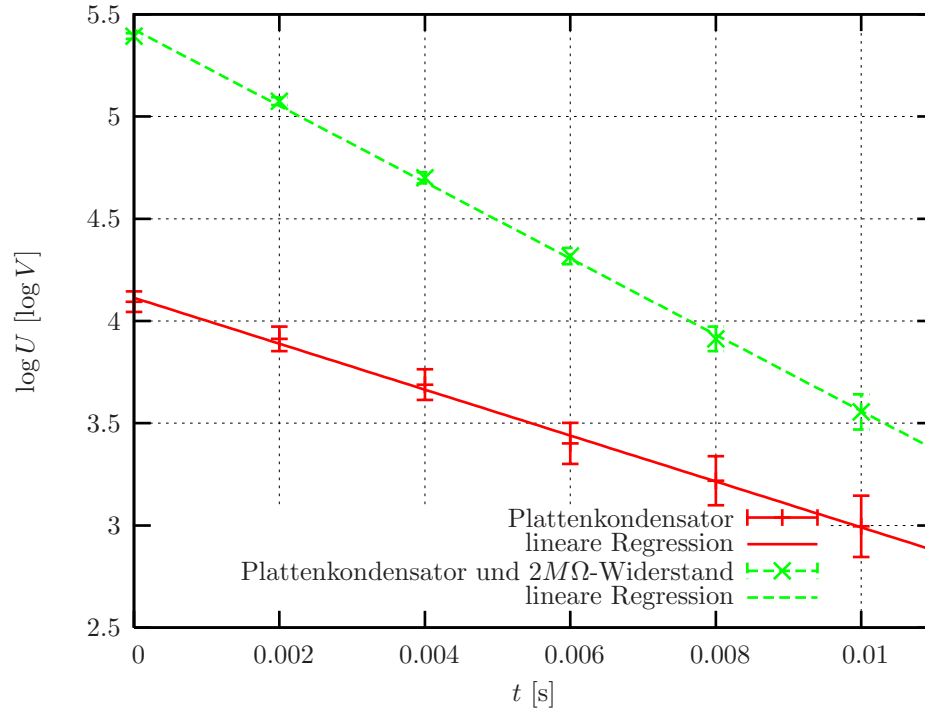


Abbildung 9: Mit dem Oszilloskop gemessene Spannungsverläufe des Plattenkondensators logarithmisch gegen die Zeit aufgetragen

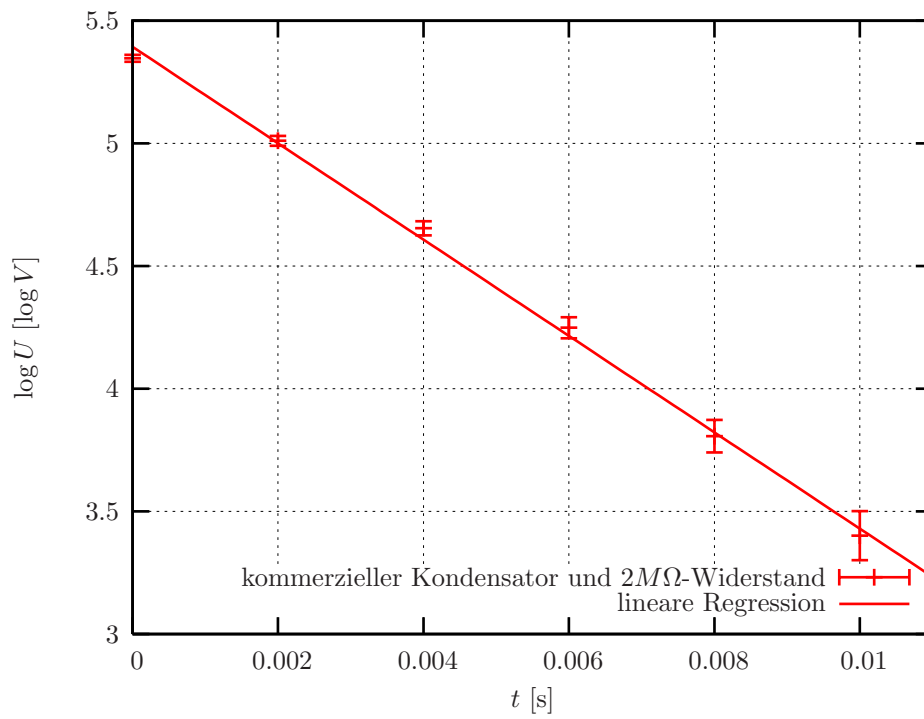


Abbildung 10: Mit dem Oszilloskop gemessene Spannungsverläufe des kommerziellen Kondensators logarithmisch gegen die Zeit aufgetragen