

Physikalisches A-Praktikum

Versuch 14

Magnetfelder von Spulen

Praktikanten: Nils Kanning
Steffen Klemer
Durchgeführt am: 28.09.2006
Gruppe: 6
Assistent: Boris Landgraf

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
2	Theorie	4
2.1	Das Magnetische Feld	4
2.2	Magnetfelder verschiedener Körper	5
2.2.1	Unendlich langer Draht	5
2.2.2	Kreisförmige Leiterschleife	6
2.2.3	Spule	7
2.2.4	Helmholtz-Spulenpaar	8
2.3	Messverfahren	9
2.3.1	Hall-Sonde	9
2.3.2	Induktionsspule	10
2.4	Bestimmung der Permeabilitätskonstanten μ_0	12
3	Durchführung	12
3.1	Induktionsspule	12
3.2	Hall-Sonde	12
4	Auswertung	13
4.1	Eichung des Galvanometers	13
4.2	Magnetfeldmessung mit der Induktionsspule	13
4.3	Magnetfeld der längeren Spule	13
4.4	Vergleich theoretischer und realer Feldverlauf	13
4.5	Helmoltz Spulen	14
4.6	Bestimmung der Induktionskonstanten	14
5	Einordnung der Ergebnisse	14
A	Tabellen und Grafiken	16

1 Einleitung

In diesem Versuch wird das magnetische Feld innerhalb einer Spule untersucht. Wir werden dabei verschiedene Spulentypen betrachten. Außerdem kommen zwei verschiedene Messverfahren zum Einsatz. Zum einen wird eine Hall-Sonde verwendet. Andererseits werden auch Messungen mit einer Induktionsspule durchgeführt.

2 Theorie

2.1 Das Magnetische Feld

Das magnetische Feld wird durch bewegte Ladungen, also durch Ströme, erzeugt. Bei einer zeitunabhängigen Ladungsverteilung wird dieser Aspekt durch das AMPÈREsche Gesetz beschrieben:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}$$

Dabei ist \vec{H} die *magnetische Feldstärke*. Die Größe \vec{j} ist die Stromdichte, also der an einem Ort durch eine infinitesimale Fläche fließende Strom.

Die zweite für das magnetische Feld charakteristische Eigenschaft ist die *Divergenzfreiheit* der *magnetischen Flussdichte* \vec{B} :

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Diese Gleichung sagt aus, dass es keine magnetischen Monopole gibt oder, bildlich gesprochen, dass die magnetischen Feldlinien stets geschlossen sind.

Nun muss noch die Interaktion von Materie mit einem Magnetfeld spezifiziert werden. Dies geschieht durch die LORENTZ-Kraft:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

Somit ist die auf einen Körper wirkende Kraft abhängig von seiner elektrischen Ladung q und seiner Geschwindigkeit \vec{v} .

Weiter besteht nun eine Verknüpfung der beiden eben zur Beschreibung des magnetischen Feldes eingeführten Größen \vec{H} und \vec{B} . Dieser Zusammenhang ist abhängig von der Möglichkeit der *Magnetisierung* des vom Magnetfeld durchsetzten Materials. Diese Eigenschaft wird durch eine materialspezifische Konstante, die *relative Permeabilität* μ_r ausgedrückt. So lässt sich die bereits angedeutete Beziehung schreiben als:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

Hier ist μ_0 eine allgemeine Naturkonstante – die *Permeabilitätskonstante*.

In diesem Versuch werden lediglich von Luft durchsetzte Spulen betrachtet. Da Luft unter Normalbedingungen nicht magnetisierbar ist, gehen wir im Folgenden von einer relativen Permeabilität $\mu_r = 1$ aus und schreiben somit:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \tag{1}$$

Das Biot-Savartsche Gesetz Um im folgenden Abschnitt die Magnetfelder von Spulen theoretisch untersuchen zu können, benötigen wir zunächst ein Hilfsmittel zu deren Berechnung. Dieses erhalten wir durch eine Lösung des AMPÈRESchen Gesetzes welche auch die Divergenzfreiheit erfüllt. Diese Lösung ist das BIOT-SAVARTSche Gesetz:

$$\vec{H}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{x}') \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} dV' \quad (2)$$

Induktion Um das Phänomen der *Induktion* zu erläutern, betrachten wir eine geschlossene Leiterschleife. Wird diese innerhalb eines Magnetfeldes bewegt oder deformiert, so erfahren die Ladungsträger in der Schleife eine Lorentzkraft. Diese Kraft verursacht eine Bewegung der Elektronen im Leiter und damit einen Stromfluss. Weiter stellt sich heraus, dass nicht nur eine Änderung an der Leiterschleife, sondern auch eine Änderung des Magnetfeldes einen Strom hervorruft.

Um diesen quantifizieren zu können, führen wir den *magnetischen Fluss* Φ durch eine vom Magnetfeld B durchsetzte Fläche A ein:

$$\Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}'$$

Nun kann aus der Lorentzkraft in Abhängigkeit von dem Widerstand R der Leiterschleife der resultierende Strom I berechnet werden. Dieser Strom setzt außerdem eine Potentialdifferenz voraus, welche wir als Induktionsspannung U_{ind} bezeichnen. Wir erhalten so das *Induktionsgesetz*:

$$U_{ind} = RI = -\dot{\Phi} = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}'$$

2.2 Magnetfelder verschiedener Körper

2.2.1 Unendlich langer Draht

Zunächst wollen wir das magnetische Feld eines langen, oder im Idealfall unendlich lang ausgedehnten, Leiters betrachten.

Die Feldlinien bilden konzentrische Kreise um den Leiter. Dies bedeutet, dass die Feldstärke in einem festen Abstand vom Leiter stets gleich ist. Um diesen Umstand auszunutzen, verwenden wir das AMPÈRESche Gesetz in der Integralform:

$$I = \oint_C \vec{H}(x) d\vec{x}$$

Als Kurve C wählen wir nun einen konzentrischen Kreis mit Radius R um den Leiter. Wir erhalten somit:

$$I = \oint_C \vec{H}(x) d\vec{x} = H(C) \oint_C |d\vec{x}| = H(R) 2\pi R$$

Somit hängt der Betrag des magnetischen Feldes eines langen Leiters, wie auch zu erwarten war, von Radius R und vom Stromfluss I im Leiter ab:

$$H(R) = \frac{I}{2\pi R}$$

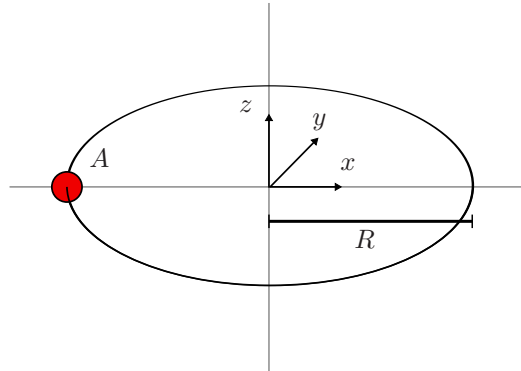


Abbildung 1: Kreisförmige Leiterschleife

2.2.2 Kreisförmige Leiterschleife

Um später das Magnetfeld einer Spule bestimmen zu können, ist es zunächst hilfreich eine kreisförmige Leiterschleife zu betrachten (siehe Abb. 1). Wir nehmen an, dass diese sich in der x - y -Ebene mit dem Mittelpunkt im Ursprung befindet. Durch sie fließe ein Strom I .

Wir nehmen weiter an, dass der Strom I durch eine Querschnittsfläche \vec{A} des Leiters konstant ist. Mit dieser Annahme betrachten wir nun die Relation zwischen Strom I und Stromdichte \vec{j} :

$$I = \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A}' = \vec{j} \cdot \vec{A}$$

Mit Hinblick auf das BIOT-SAVARTSche Gesetz bedeutet dies insbesondere für ein kleines Leitervolumen dV' mit der Länge dr' :

$$\vec{j}dV' = \vec{j} \cdot \vec{A} d\vec{r}' = Id\vec{r}'$$

Hierbei fassen wir $d\vec{r}'$ als Vektor auf, um die Aussage über die Richtung des Stromflusses beizubehalten. Dies ist möglich, da \vec{j} parallel zu $d\vec{r}'$ ist und \vec{A} senkrecht zu beiden Vektoren steht.

Mit dieser Erkenntnis können wir auf Grund des BIOT-SAVARTSchen Gesetzes das Magnetfeld der Leiterschleife ausdrücken als:

$$\vec{H}(\vec{x}) = \frac{I}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{r}' \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

Nach dem Übergang zu Zylinderkoordinaten, wobei wir die z -Koordinate nicht transformieren, kann das Integral komponentenweise gelöst werden. Wir interessieren uns in diesem Versuch nur für Punkte $\vec{x} = (0, 0, z)$. Also Orte die auf der z -Achse liegen. Hierfür hat die Lösung die Form:

$$\begin{aligned} H_x(z) &= 0 \\ H_y(z) &= 0 \\ H_z(z) &= \frac{IR^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

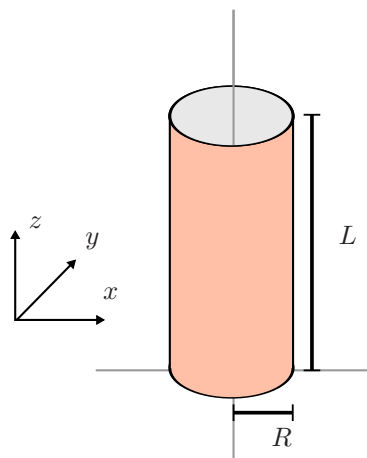


Abbildung 2: Spule im Ursprung des Koordinatensystems

2.2.3 Spule

Wir behalten zur Betrachtung einer Spule das oben eingeführte Koordinatensystem bei. Eine Spule wird nun aus N sich übereinander befindenden Leiterschleifen modelliert. Dieser ‘‘Stapel’’ aus Leiterschleifen erstreckt sich von der z -Koordinate 0 bis L (siehe Abb. 2). Wir nennen nun L die Länge der Spule.

Weiter führen wir ein Maß für die Windungsdichte ein:

$$n = \frac{N}{L}$$

Die Anzahl der Leiterschleifen in einem kleinen Spulenlängenabschnitt dl ist somit:

$$N \frac{dl}{L} = ndl$$

Nach diesen Vorarbeiten können wir das Magnetfeld einer Spule berechnen. Hierzu summieren wir die Beiträge der einzelnen Leiterschleifen an den verschiedenen Stellen der Spulen zum gesamten Feld auf. Wie schon bei der Betrachtung der Leiterschleife, konzentrieren wir uns auch hier auf Punkte der Form $\vec{x} = (0, 0, z)$. In diesem Fall bedeutet dies, dass die Punkte auf der Symmetrieachse der Spule liegen. Von der Betrachtung der Leiterschleife wissen wir ebenfalls, dass die x - und y -Komponente des sich ergebenden Feldes auf der Symmetrieachse der Spule verschwindet und die für uns interessante z -Komponente nur von z abhängt:

$$\begin{aligned} H(z) &= \int_0^L \frac{IR^2}{2(R^2 + (z-l)^2)^{3/2}} ndl \\ &= \frac{IN}{2L} \left(\frac{L-z}{\sqrt{R^2 + (L-z)^2}} + \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

Betrachtet man sehr lange Spulen, d. h. Spulen bei denen die Länge L viel größer als der Radius R ist, so beträgt das Magnetfeld in der Mitte der Spule:

$$H(z) = \frac{IN}{L} \quad \text{für } z = L/2 \quad (4)$$

Dies ist außerdem eine gute Näherung für den gesamten Innenraum einer solchen langen Spule. Lediglich am Rand kommen wir mit den gleichen Annahmen zu der Näherung:

$$H(z) = \frac{IN}{2L} \quad \text{für } z = 0, L$$

Schließlich kann man aus Gl. 3 auch schließen, dass das Magnetfeld im Außenraum einer Spule stark abfällt.

Mit diesen Überlegungen kann auch sehr schnell die Frage nach dem Magnetfeld, welches bei der Aneinanderreihung von zwei Spulen entsteht, beantwortet werden. Hier gehen wir davon aus, dass die Spulen gleich eng gewickelt sind, also $n_1 = n_2 = n$. Somit addieren sich an den nun aneinander liegenden Rändern der Spulen die Feldstärken:

$$\frac{IN}{2L} + \frac{IN}{2L} = \frac{IN}{L}$$

Es herrscht nun auch hier die gleiche Feldstärke wie im Inneren der Einzelspulen. Wir können die beiden Spulen folglich wie eine große Spule betrachten.

Rufen wir uns den Weg in Erinnerung wie wir das Feld einer Spule berechnet haben, so ist dieses Ergebnis nicht überraschend. Man könnte das Feld von zwei aneinander liegenden Spulen auch über ein Integral über die doppelte Spulenlänge $2L$ berechnen.

2.2.4 Helmholtz-Spulenpaar

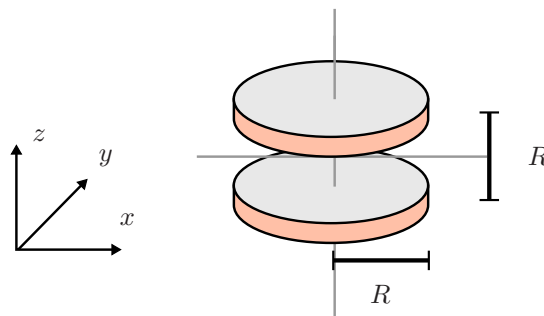


Abbildung 3: HELMHOLTZ-Spulenpaar

Schließlich interessiert uns in diesem Versuch noch das Feld einer speziellen Spulenkombination – das HELMHOLTZ-Spulenpaar. Diese besteht aus zwei identischen Spulen mit einer vernachlässigbaren Länge und jeweils N Windungen. Beide Spulen haben den Radius R und sind im Abstand $d = R$ voneinander positioniert. Dabei befindet sich eine der Spulen bei der z -Koordinate $-R/2$ und die andere bei $R/2$ (siehe Abb. 3).

Erneut interessiert uns nur die z -Komponente des Magnetfeldes auf der Symmetrieachse des Spulenpaares. Diese berechnen wir nun, indem wir das Feld von N Leiterschleifen addieren. Hier wird nur das Feld in der Mitte, also $z = 0$ des Spulenpaares berechnet. Dieses stellt bei genauerer Betrachtung allerdings eine sogar

sehr gute Näherung für den gesamten Innenraum dar. Wir schreiben also:

$$\begin{aligned} H(z) &= N \frac{IR^2}{2(R^2 + (-R/2)^2)^{3/2}} + N \frac{IR^2}{2(R^2 + (R/2)^2)^{3/2}} \\ &= I \left(\frac{4}{5}\right)^{3/2} \frac{N}{R} \quad \text{für } z \in [-R/2, R/2] \end{aligned}$$

2.3 Messverfahren

Nachdem wir bis hierhin die Magnetfelder theoretisch betrachtet haben benötigen wir nun Methoden um diese Aussagen im Versuch zu überprüfen. Hierzu werden nun zwei verschiedene Messverfahren für Magnetfelder vorgestellt.

2.3.1 Hall-Sonde

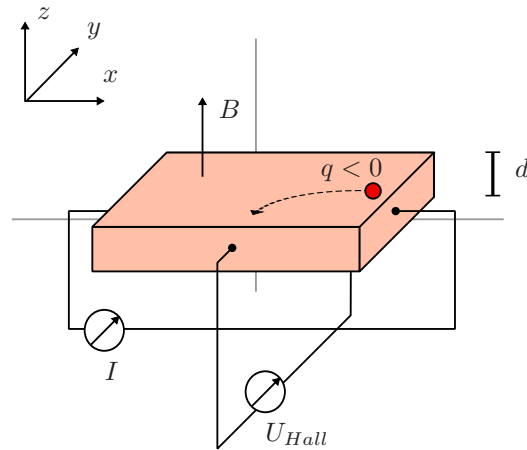


Abbildung 4: Hall-Sonde

Eine *Hall-Sonde* besteht aus einer Leiterplatte durch die ein Strom I fließt (siehe Abb. 4). Dieser Leiter wird so in einem Magnetfeld \vec{B} positioniert, dass die Richtung des Stromflusses senkrecht zum Magnetfeld ist. Durch das Magnetfeld werden nun die Ladungsträger im Leiter in einer Richtung senkrecht zu den beiden, bereits durch I und \vec{B} ausgezeichneten, Richtungen abgelenkt. Hierdurch entsteht eine so genannte *Hallspannung* U_{Hall} zwischen den sich in dieser Richtung befindenden Enden der Leiterplatte. Es stellt sich heraus, dass diese Spannung ein lineares Maß für das Magnetfeld \vec{B} ist.

Zur quantitativen Betrachtung wählen wir nun ein Magnetfeld \vec{B} in positive z -Richtung. Die Leiterplatte befinde sich im Ursprung und durch sie fließe ein Strom I in positive x -Richtung. Dies bedeutet, dass sich die Ladungsträger je nach Vorzeichen der Ladung in die negative oder positive x -Richtung bewegen. Die Geschwindigkeit dieser Ladungsträger sei v und ihre Ladung q . Somit wirkt auf sie eine LORENTZ-Kraft F_L in y -Richtung. Die Orientierung ist erneut abhängig vom Vorzeichen der Ladung. Da alle relevanten Größen in der gewählten Anordnung senkrecht zueinander sind beträgt diese Kraft in skalarer Schreibweise:

$$F_L = Bvq$$

Durch die Bewegung der Ladungsträger in y -Richtung sind die Ladungen auf der Platte nun nicht mehr gleich verteilt. Es entsteht ein elektrisches Feld E . Die durch dieses Feld auf die Ladungsträger wirkende Kraft ist entgegen der Lorentzkraft gerichtet und beträgt:

$$F_E = qE = q \frac{U_{Hall}}{b}$$

Dabei ist b die Ausdehnung der Leiterplatte in y -Richtung.

Nun stellt sich ein Gleichgewicht zwischen beiden Kräften ein:

$$F_L + F_E = 0$$

Verwenden wir nun die oben bestimmten Beträge der beiden Kräfte, so können wir eine Aussage über die Größe der Magnetfeldes B treffen:

$$B = - \frac{U_{Hall}}{vb}$$

Nun können wir noch die Geschwindigkeit v der Ladungsträger durch den Strom I ausdrücken. Hierzu betrachten wir einen Querschnitt des Leiters in der y - z -Ebene. Die Fläche dieses Querschnitts ist dann $A = bd$, wobei d die Ausdehnung des Leiters in z -Richtung ist. Nun definieren wir die Anzahldichte n der Ladungsträger im Leiter als:

$$n = \frac{N}{V}$$

Hiermit können wir die Anzahl ΔN der Ladungsträger berechnen, die die Querschnittsfläche A in der Zeit Δt durchqueren:

$$\Delta N = nAv\Delta t$$

Der Strom I ist die pro Zeit durch den Leiterquerschnitt geflossene Ladung, also:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{q\Delta N}{\Delta t} = qnAv$$

Es folgt für das Magnetfeld mit Gl. 5:

$$B = - \frac{U_{Hall}qn}{I} \quad (5)$$

Hier zeigt sich nun die gesuchte Proportionalität zwischen B und U_{Hall} .

Die Proportionalitätskonstante hängt zum einen von Strom I ab. Zum anderen spielen auch die materialspezifischen Größen q und n eine Rolle. Weiter ist zu beachten, dass die Anzahldichte n auch von der Temperatur abhängt. Diese Tatsache muss bei der Verwendung der Hall-Sonde mit einer bereits zuvor durch Eichung bestimmten Proportionalitätskonstante berücksichtigt werden.

2.3.2 Induktionsspule

Alternativ können wir das Magnetfeld \vec{B} einer Spule auch durch eine *Induktionsspule* bestimmen die wir in das Innere der Spule einbringen. Um die weitergehende Betrachtung zu vereinfachen achten wir dabei darauf, dass die Symmetrieachsen beider Spulen übereinstimmen. Dies bedeutet, dass die vom Magnetfeld \vec{B} durchsetzte Fläche A der Induktionsspule über den Radius r ausgedrückt werden kann:

$$A = \pi r^2$$

Nun wird das Magnetfeld der Spule deaktiviert. Hierdurch ändert sich der magnetische Fluss Φ durch die Induktionsspule. Wir wählen zunächst einen Zeitpunkt t_1 zu dem das Feld noch aktiv ist. Dann beträgt der Fluss bei einer Induktionsspule mit N_{ind} Windungen:

$$\Phi(t_1) = N_{ind} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}' = N_{ind} B A$$

Zum Zeitpunkt t_2 ist das Magnetfeld deaktiviert, also $B = 0$. Dann gilt auch:

$$\Phi(t_2) = 0$$

Während des Ausschaltens des Feldes wird die Induktionsspule mit einem *ballistischen Galvanometer* verbunden. Von diesem wissen wir bereits aus *Versuch 11 - Das Drehspul-Galvanometer*, dass die maximale Auslenkung φ_{max} bei einem Stromstoß proportional zur geflossenen Ladung Q ist. Die Proportionalitätskonstante nennen wir α :

$$\varphi_{max} = \alpha Q \quad (6)$$

Hiermit lässt sich nun eine Beziehung zur Ursache des Stromflusses, der bei der Flussänderung induzierten Spannung U_{ind} herstellen:

$$\varphi_{max} = \alpha Q = \alpha \int_{t_1}^{t_2} I dt = -\frac{\alpha}{R} \int_{t_1}^{t_2} U_{ind} dt$$

Hier ist R der OHMSche Widerstand des Messaufbaus. Nach dem Induktionsgesetz, Gl. 3, bedeutet dies:

$$\begin{aligned} \varphi_{max} &= -\frac{\alpha}{R} \int_{t_1}^{t_2} \dot{\Phi} dt \\ &= \frac{\alpha}{R} (\Phi(t_1) - \Phi(t_2)) \\ &= \frac{\alpha}{R} N_{ind} B A \end{aligned}$$

Hieraus kann das Magnetfeld B bestimmt werden:

$$B = \frac{R}{\alpha N A} \varphi_{max} \quad (7)$$

Zuvor muss jedoch noch die Proportionalitätskonstante α ermittelt werden. Hierzu lassen wir für eine Zeit Δt einen bekannten Strom I durch das Galvanometer fließen. Die geflossene Ladung ist dann:

$$Q = I \Delta t$$

Wir ermitteln hieraus mit Gl. 6 die benötigte Konstante α :

$$\alpha = \frac{\varphi_{max}}{I \Delta t}$$

Um den zeitlich konstanten Stromfluss zu realisieren, verwenden wir die in Abb. 5 dargestellte Schaltung. Der Gesamtwiderstand R_{ges} ergibt sich zu:

$$R_{ges} = R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Der Gesamtstrom I_{ges} ist somit:

$$I_{ges} = \frac{U_{ges}}{R_{ges}}$$

Nun können wir den benötigten Strom $I = I_1$ durch das Galvanometer berechnen:

$$I = I_1 = I_{ges} \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

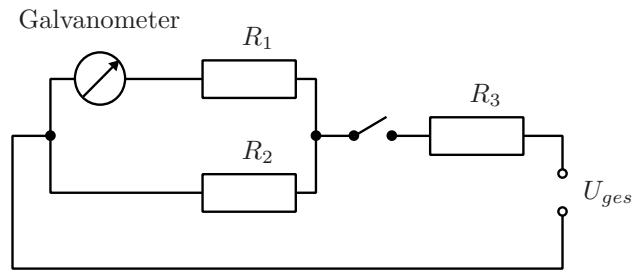


Abbildung 5: Schaltung zum Eichen des Galvanometers

2.4 Bestimmung der Permeabilitätskonstanten μ_0

Zur Bestimmung der Permeabilitätskonstanten μ_0 verwenden wir Gl. 1 in skalarer Schreibweise:

$$\mu_o = \frac{B}{H}$$

Die magnetische Flussdichte B erhalten wir dabei aus unseren Messungen mit der Hall-Sonde, siehe Gl. 5, und der Induktionsspule, Gl. 7. Die magnetische Feldstärke H geht aus der theoretischen Betrachtung in Gl. 4 hervor.

3 Durchführung

Zuerst wurde das Galvanometer mit einer Zeitschaltuhr und der, in Abb. 5 zu sehenden, Schaltung für einige Zeiten t geeicht.

3.1 Induktionsspule

Durch Ein- und Ausschalten eines Stromes von 0.5A durch eine lange Spule wird in dieser ein sich änderndes Magnetfeld erzeugt. Nun haben wir mit Hilfe einer Induktionsspule im Abstand von 2cm Messungen entlang der Symmetrieachse in der Mitte dieser Spule vorgenommen.

Anschließend haben wir die Induktionsspule exakt mittig platziert und bei verschiedenen Stromstärken gemessen. Dies wurde mit einer zweiten, etwas kürzeren Spule wiederholt.

3.2 Hall-Sonde

Mit Hilfe einer solchen Sonde wurde das Magnetfeld der beiden Spulen und eines Helmholtz-Spulenpaares entlang der Symmetrieachse in 1cm Schritten bei erneut 0.5A Spulenstrom vermessen.

4 Auswertung

4.1 Eichung des Galvanometers

In Tab. 1 sind die gemessenen Ausschläge bei verschiedenen Ladungen

$$Q = t \cdot I$$

mit samt den Quotienten φ/Q aufgezeichnet. Die sich daraus als gewichteter Mittelwert ergebende Proportionalitätskonstante ist

$$\alpha = 9.6(3) \cdot 10^4 \frac{1}{C}$$

In das $R1$ aus Abb 5 gingen der Widerstand der Induktionsspule, des Galvanometers sowie des $1K$ Widerstandes ein. Daraus kann nun über Gl. 7 die Flussdichte bestimmt werden, wobei sich R hier aus den 3 eben genannten sowie dem 1Ω Widerstand ergibt. Die Fehler beruhen auf dem Ablesefehler der Ausschlagsmessung und gehen durch die Fehlerfortpflanzung ein.

Die Hall-Sonde zeigt die Werte in Gauss mit einem Offset an. Das reale B -Feld errechnet sich daher zu

$$B = (x - 4.1 G) \cdot 10^{-4} \frac{T}{G}$$

4.2 Magnetfeldmessung mit der Induktionsspule

Die erhaltenen Werte sind in den Tabellen 2, 3 sowie 4 zu finden. Die Plots in den Abbildungen 6, 7 und 8.

4.3 Magnetfeld der längeren Spule

In Abb. 9 ist der gemessene Feldverlauf der langen Spule sowohl durch die Messung mit der Induktionsspule, als auch mit der Hall-Sonde aufgezeichnet.

4.4 Vergleich theoretischer und realer Feldverlauf

Der sich aus Gl. 3 ergebende Feldstärkeverlauf ist zusammen mit den jeweiligen Messungen der beiden Spulen mit der Hallsonde in Abb. 10 aufgetragen. Als theoretische Näherung in der Mitte ergeben sich:

$$B = \mu_0 \frac{N \cdot I}{l}$$

$$B_{lang} = \mu_0 \frac{832 \cdot 0,5 A}{0,45 m} = 1.16 \cdot 10^{-3} T$$

$$B_{kurz} = \mu_0 \frac{502 \cdot 0,5 A}{0,27 m} = 1.17 \cdot 10^{-3} T$$

Vergleicht man diese Werte mit den Messwerten in der Abbildung, so weicht der Wert für die lange Spule um etwa 10% nach oben vom Messwert ab. Der für die Kurze Spule berechnete Wert weicht sogar um etwa 24% vom Messwert ab. An dieser Stelle ist deutlich zu erkennen, dass bei der Näherung der Radius R der Spulen vernachlässigt wird. So ist das Ergebniss bei einem kleineren Quotienten R/L genauer. Auch die Abweichung der Näherung nach oben stimmt mit der Theorie überein.

4.5 Helmholtz Spulen

Abbildung 11 zeigt die gemessenen Flussdichten der Helmholtz Spulen. Auffällig ist ihr doch recht inhomogenes Magnetfeld verglichen mit einer langen Spule. Die theoretische Flussdichte in der Mitte ist

$$\begin{aligned} B &= \mu_0 I \left(\frac{4}{5}\right)^{3/2} \cdot \frac{N}{R} \\ &= 3.51 \cdot 10^{-3} \text{ T} \end{aligned}$$

Dieser Wert liegt etwa 5% über dem mit der Hallsonde gemessenen Wert.

4.6 Bestimmung der Induktionskonstanten

Wie wir im Theorieteil beschrieben haben, kann aus einer Messung der Flussdichte und der Bestimmung der Feldstärke die Induktionskonstante bestimmt werden. Dazu teilten wir alle Messwerte der Hallsondenmessung von langer und kurzer Spule durch den theoretischen Feldstärkewert an dieser Stelle. Dabei ergeben sich zwei Mittelwerte:

$$\begin{aligned} \mu_{0 \text{ lang Indu}} &= 1.50(13) 10^{-6} \text{ H/m} \\ \mu_{0 \text{ lang Hall}} &= 1.18(15) 10^{-6} \text{ H/m} \\ \mu_{0 \text{ kurz}} &= 1.16(7) 10^{-6} \text{ H/m} \end{aligned}$$

Da der Fehler der Hallsonde nicht bekannt ist, sind die hier verwendeten Fehlerangaben die Standardabweichungen. Eine gewichtete Mittelwertbildung über die Messreihen ergibt schließlich:

$$\mu_0 = 1.25(8) 10^{-6} \text{ H/m}$$

Von der Induktionsspule wurde nur die Messung bei konstantem Strom verwendet.

5 Einordnung der Ergebnisse

Die Messwerte der Induktionsspulenmessung zeigen das erwartete Verhalten. Die Proportionalität zwischen Magnetfeld und Strom ist gut zu erkennen.

Die Messungen mit der Hallsonde stützen qualitativ das theoretisch gewonnene Bild des Verlaufs der Spulenfelder. Aus Abb. 10 sowie Abb. 11 wird deutlich, dass die Messwerte allerdings systematisch unter den theoretischen Werten liegen. Da dieses Phänomen bei allen drei betrachteten Spulen auftritt, sind ungenaue Angaben über die Spulengeometrie als Ursache auszuschließen. Der bei der Berechnung des Magnetfeldes vom Messwert subtrahierte Offset scheidet ebenfalls als Ursache aus, da die beobachtete Abweichung mit größeren Feldern zunimmt. Somit verbleibt einzig ein systematischer Fehler der Hallsonde.

Der Vergleich von Induktionsspule und Hallsonde zeigt einen qualitativ gleichwertigen Verlauf, wobei die Spulenwerte etwas über den Erwartungswerten liegen. Ein Erklärungsansatz ist die recht große Ungenauigkeit bei der Eichung des Galvanometers mit nur 3 verschiedenen Ladungen. Ansonsten macht sich sicher auch die vergleichsweise große Ausdehnung der Induktionsspule bemerkbar. Die einzelnen

Innenwiderstände sollten dagegen alle berücksichtigt sein, wobei sie gegen den $1k\Omega$ verschwindend klein sind.

Bei der Berechnung der Induktionskonstanten μ_0 auf Basis der Hall-Werte schlägt sich der eben diskutierte Effekt in einer im Vergleich zum Literaturwert zu kleinen Konstanten nieder. Die Messwerte mit der Induktionsspule sind dagegen systematisch zu groß, was in diesem Fall ein Ausgleichen der Fehler bedeutet. Damit weicht unser Wert praktisch nicht vom Literaturwert¹ $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m} \approx 1,257 \cdot 10^{-6} \text{ H/m}$ ab.

¹E. R. Cohen und B. N. Taylor: The 1986 CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants, J. Phys. Chem. Ref. Data, 17, 1795 – 1803 (1988)

A Tabellen und Grafiken

t [s]	Q [C]	a [cm]	φ [rad]	σ_φ [rad]	α [1/C]	σ_α [1/C]
0.396	8.37E-07	16.0	7.933E-02	2.438E-03	9.473E+04	2.9E+03
0.252	5.33E-07	10.5	5.231E-02	2.473E-03	9.816E+04	4.6E+03
0.084	1.78E-07	3.5	1.749E-02	2.497E-03	9.848E+04	1.4E+04

Tabelle 1: Eichung des Galvanometers

a [m]	φ [rad]	σ_φ [rad]	B [T]	σ_B [T]
0.42	3.750E-03	2.500E-03	3.996E-05	2.664E-05
0.35	7.499E-03	2.499E-03	7.992E-05	2.664E-05
0.30	1.500E-02	2.498E-03	1.598E-04	2.662E-05
0.28	2.248E-02	2.495E-03	2.396E-04	2.659E-05
0.26	3.494E-02	2.488E-03	3.724E-04	2.651E-05
0.24	4.983E-02	2.475E-03	5.311E-04	2.638E-05
0.22	6.955E-02	2.452E-03	7.411E-04	2.613E-05
0.20	8.420E-02	2.430E-03	8.972E-04	2.589E-05
0.18	9.870E-02	2.404E-03	1.052E-03	2.562E-05
0.16	1.083E-01	2.385E-03	1.154E-03	2.541E-05
0.14	1.130E-01	2.374E-03	1.205E-03	2.530E-05
0.12	1.154E-01	2.369E-03	1.230E-03	2.525E-05
0.10	1.178E-01	2.364E-03	1.255E-03	2.519E-05
0.08	1.178E-01	2.364E-03	1.255E-03	2.519E-05
0.06	1.201E-01	2.358E-03	1.280E-03	2.513E-05
0.04	1.201E-01	2.358E-03	1.280E-03	2.513E-05
0.02	1.201E-01	2.358E-03	1.280E-03	2.513E-05
0.00	1.201E-01	2.358E-03	1.280E-03	2.513E-05
-0.02	1.201E-01	2.358E-03	1.280E-03	2.513E-05
-0.04	1.201E-01	2.358E-03	1.280E-03	2.513E-05
-0.06	1.201E-01	2.358E-03	1.280E-03	2.513E-05
-0.08	1.201E-01	2.358E-03	1.280E-03	2.513E-05
-0.10	1.178E-01	2.364E-03	1.255E-03	2.519E-05

Tabelle 2: Magnetfeld der langen Spule bei festem Strom gemessen mit der Induktionsspule

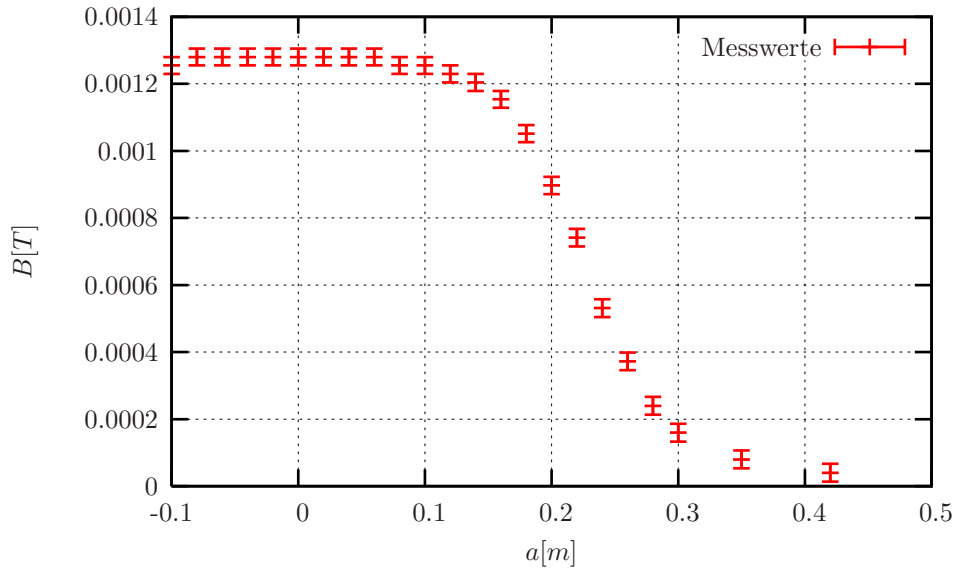


Abbildung 6: Magnetfeld der langen Spule bei 0.5A gemessen mit der Induktionsspule

I [A]	φ [rad]	σ_φ [rad]	B [T]	σ_B [T]
0.8	1.924E-01	2.148E-03	2.050E-03	2.289E-05
0.7	1.683E-01	2.227E-03	1.794E-03	2.373E-05
0.6	1.457E-01	2.294E-03	1.553E-03	2.444E-05
0.5	1.225E-01	2.353E-03	1.305E-03	2.507E-05
0.4	1.011E-01	2.399E-03	1.077E-03	2.557E-05
0.3	7.444E-02	2.445E-03	7.933E-04	2.605E-05
0.2	4.983E-02	2.475E-03	5.311E-04	2.638E-05
0.1	2.498E-02	2.494E-03	2.662E-04	2.657E-05

Tabelle 3: Magnetfeld der langen Spule am Mittelpunkt gemessen mit der Induktionsspule

I [A]	φ [rad]	σ_φ [rad]	B [T]	σ_B [T]
0.8	1.639E-01	2.241E-03	1.746E-03	2.388E-05
0.7	1.457E-01	2.294E-03	1.553E-03	2.444E-05
0.6	1.225E-01	2.353E-03	1.305E-03	2.507E-05
0.5	1.011E-01	2.399E-03	1.077E-03	2.557E-05
0.4	8.176E-02	2.434E-03	8.713E-04	2.594E-05
0.3	5.971E-02	2.465E-03	6.363E-04	2.626E-05
0.2	3.991E-02	2.484E-03	4.254E-04	2.647E-05
0.1	1.999E-02	2.496E-03	2.130E-04	2.660E-05

Tabelle 4: Magnetfeld der kurzen Spule am Mittelpunkt gemessen mit der Induktionsspule

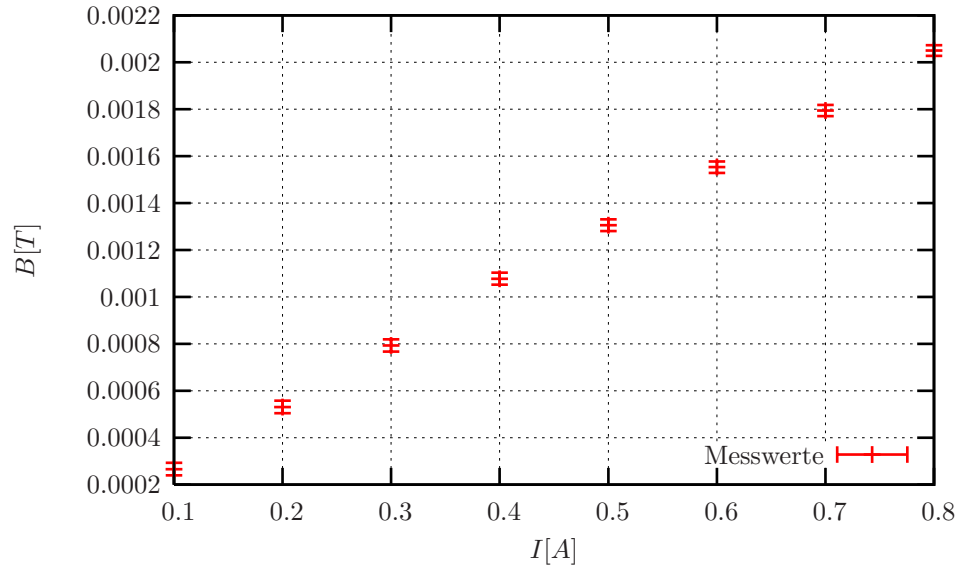


Abbildung 7: Magnetfeld in der Mitte der langen Spule bei verschiedenen Stromstärken gemessen mit der Induktionsspule

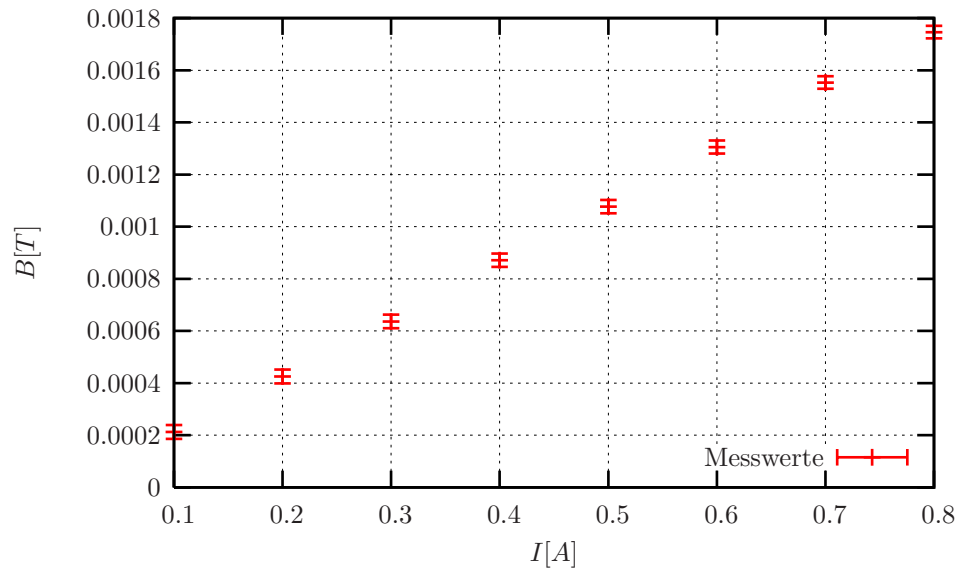


Abbildung 8: Magnetfeld in der Mitte der kurzen Spule bei verschiedenen Stromstärken gemessen mit der Induktionsspule

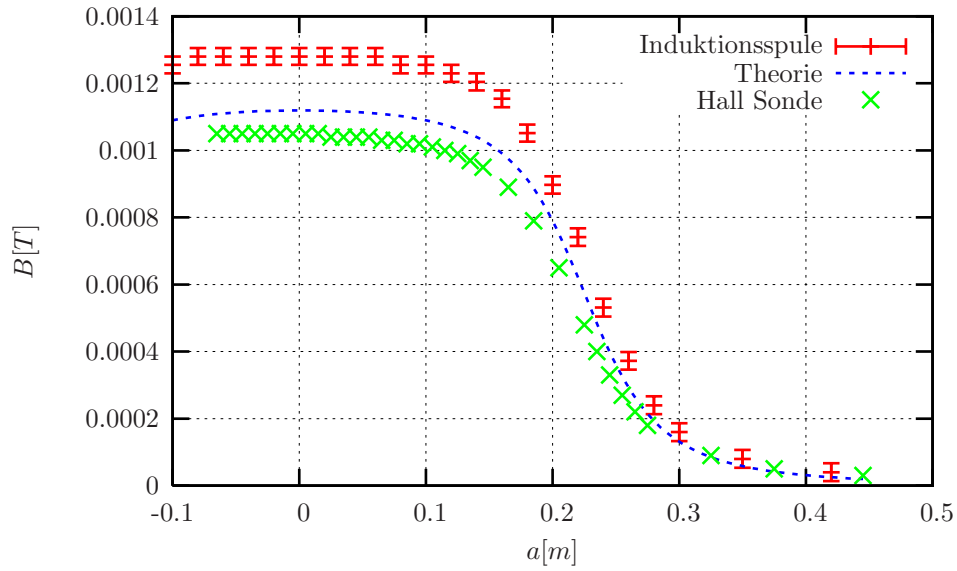


Abbildung 9: Beide Messungen der langen Spule

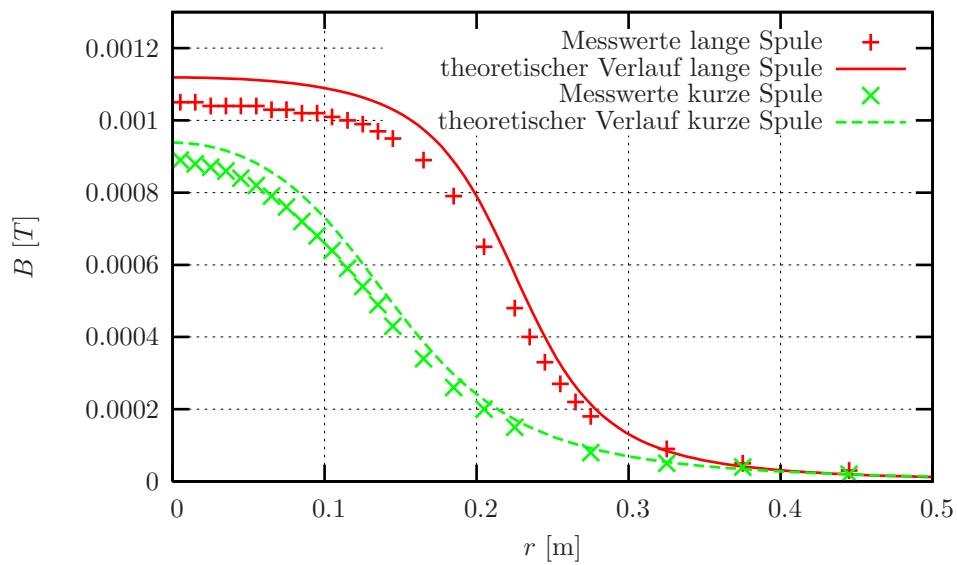


Abbildung 10: Vergleich der Messwerte der Hallsonde mit dem theoretischen Verlauf des Magnetfeldes

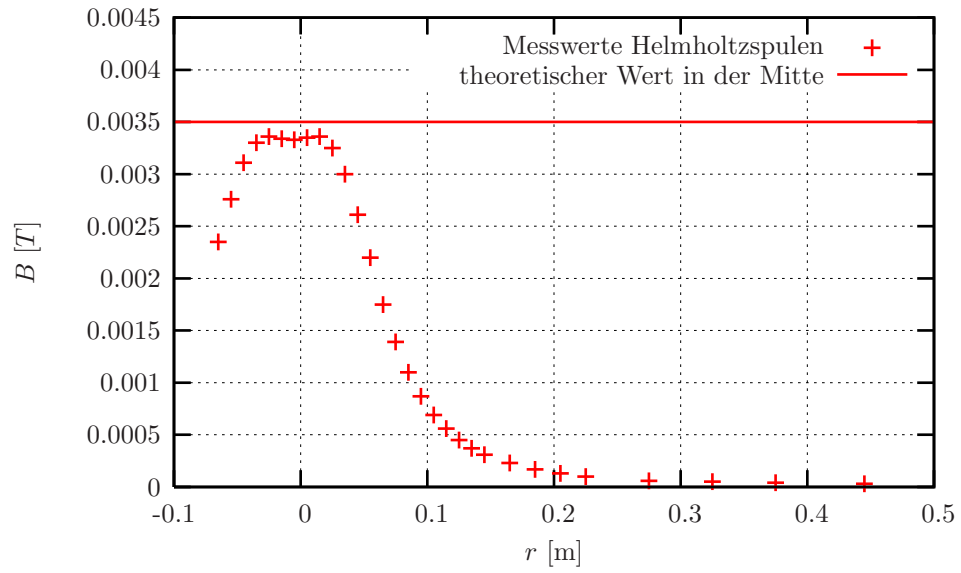


Abbildung 11: Hallsondenmessung des Feldes der Helmholtzspulen