

Physikalisches A-Praktikum

Versuch 16

Das Magnetometer

Praktikanten: Nils Kanning
Steffen Klemer
Durchgeführt am: 18.09.2006
Gruppe: 6
Assistent: Boris Landgraf

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
2	Theorie	4
2.1	Der magnetische Dipol	4
2.1.1	Kraftwirkung durch ein äußeres Magnetfeld	4
2.2	Permanentmagneten	5
2.3	Das Magnetometer	6
2.4	Das Magnetfeld der Erde	7
2.4.1	Das Erdfeld in Göttingen	7
2.5	Die Gaußschen Hauptlagen	7
2.5.1	Die erste Gaußsche Hauptlage	8
2.5.2	Die zweite Gaußsche Hauptlage	8
3	Durchführung	10
3.1	A - Magnetfeld von Spulen	10
3.2	B - Magnetfeld der Erde	10
4	Auswertung	11
4.1	Magnetfeld der Spule	11
4.2	Erdmagnetfeld	11
5	Einordnung der Ergebnisse	12
A	Tabellen und Grafiken	13

1 Einleitung

In diesem Versuch werden wir versuchen die horizontale Komponente des Magnetfeldes der Erde in Göttingen zu bestimmen. Hierzu verwenden wir das von CARL FRIEDRICH GAUSS erfundene und von ihm ebenfalls zur Bestimmung des Erdmagnetfeldes eingesetzte Magnetometer. Außerdem werden wir mit diesem Gerät auch das Feld einer Spule vermessen.

2 Theorie

2.1 Der magnetische Dipol

Um zu dem Begriff des *magnetischen Dipols* zu gelangen beginnen wir zunächst mit der Betrachtung einer geschlossenen Leiterschleife durch die ein Strom I fließt.

Die sich in dieser Leiterschleife bewegenden Ladungen sind die Ursache für ein im Umfeld herrschendes magnetisches Feld. Dieses kann mit dem bereits in *Versuch 14 - Magnetfelder von Spulen* thematisierten BIOT-SAVARTSchen Gesetz berechnet werden. In Versuch 14 wurde das Gesetz jedoch lediglich dazu verwendet, um das Magnetfeld auf der Symmetrieachse einer kreisförmigen Leiterschleife zu bestimmen. Fordert man hingegen eine Lösung für nahezu beliebige Punkte im Raum, so stellt sich heraus, dass die Geometrie des sich ergebenden Magnetfeldes in einem großen Abstand von der Leiterschleife mit der eines elektrischen Dipolfeldes übereinstimmt. Der Begriff "großer Abstand" bedeutet in diesem Fall, dass die Entfernung zwischen dem Ort an dem das Magnetfeld betrachtet wird und dem Mittelpunkt der Leiterschleife viel größer ist, als der Radius der Leiterschleife.

Man nennt das Magnetfeld in diesem Bereich auch *Fernfeld* und bezeichnet eine stromdurchflossene Leiterschleife auf Grund der Analogie zum elektrischen Dipol als *magnetischen Dipol*.

2.1.1 Kraftwirkung durch ein äußeres Magnetfeld

Eine stromdurchflossene Leiterschleife oder ein magnetischer Dipol erzeugen nicht nur selber ein magnetisches Feld, sondern erfahren auch eine Kraft bzw. ein Drehmoment, wenn sie sich in einem externen Feld \vec{B} befinden.

Um diese Aussage zu quantifizieren, betrachten wir eine Leiterschleife C . Wir berechnen nun zunächst die Kraft $d\vec{F}$, die auf ein kleines Teilstück $d\vec{x}$ des Drahtes wirkt. Bewegen sich die Ladungsträger im Draht mit der Geschwindigkeit \vec{v} bei einer konstanten Ladungsdichte ϱ , so ergibt sich:

$$d\vec{F} = \varrho dV (\vec{v} \times \vec{B})$$

Führen wir nun die Stromdichte $\vec{j} = \varrho \vec{v}$ ein, folgt:

$$d\vec{F} = (\vec{j} \times \vec{B}) dV$$

Bei einem Querschnitt a des Drahtes ist dies:

$$d\vec{F} = (\vec{j} \times \vec{B}) a |d\vec{x}|$$

Nun ist die Geschwindigkeit \vec{v} stets parallel zur Stromdichte \vec{j} und zur Länge $d\vec{x}$. Weiter können wir bei einer über den gesamten Querschnitt konstanten Stromdichte ihren Betrag durch den Strom $I = |\vec{j}|a$ ausdrücken. Zusammen ergibt dies:

$$d\vec{F} = I(d\vec{x} \times \vec{B})$$

Um die gesamte Kraft zu erhalten, integrieren wir über die ganze Schleife C :

$$\vec{F} = I \oint_C (d\vec{x} \times \vec{B})$$

Das Drehmoment \vec{T} ist dann:

$$\vec{T} = I \oint_C \vec{x} \times (d\vec{x} \times \vec{B})$$

Da die Leiterschleife meist relativ klein ist, ist es oft sinnvoll das äußere Magnetfeld \vec{B} am Ort der Schleife als homogen zu betrachten. Dann ergibt sich für die Kraft da $\oint_C d\vec{x} = 0$:

$$\vec{F} = 0$$

Trotzdem wirkt in diesem Fall ein Drehmoment:

$$\vec{T} = I \oint_C \vec{x} \times (d\vec{x} \times \vec{B}) = I(\vec{A} \times \vec{B}) \quad (1)$$

Hierbei ist nun \vec{A} der Normalenvektor der Fläche der Leiterschleife und hat die Orientierung des schleifen-eigenen Magnetfeldes. Um wieder die Analogie zum elektrischen Dipol herzustellen, definieren wir nun ein *magnetisches Dipolmoment* \vec{m} :

$$\vec{m} = I\vec{A}$$

Verwenden wir an Stelle einer einzelnen Leiterschleife eine Spule mit N Windungen, so folgt:

$$\vec{m} = NI\vec{A} \quad (2)$$

Die Richtung des Dipolmoments wird als *magnetischer Nordpol* des Dipols bezeichnet. Der *Magnetische Südpol* liegt entsprechend in der entgegengesetzten Richtung.

Aus Gl. 1 wird deutlich, dass sich, falls \vec{m} parallel zum äußeren Feld \vec{B} ist, ein stabiles Gleichgewicht einstellt. Dies bedeutet, dass sich der Nordpol eines magnetischen Dipols stets zum Südpol des externen Feldes ausrichtet.

Für zwei wechselwirkende magnetische Dipole bedeutet diese Erkenntnis, erneut in Analogie zum elektrischen Dipol, dass entgegengesetzte Pole sich anziehen und gleiche Pole sich abstoßen.

2.2 Permanentmagneten

Zur Realisation des, in diesem Versuch verwendeten, Magnetometers benutzen wir an Stelle einer Leiterschleife einen *Permanentmagneten* in Form eines *Stabmagneten*.

Um die Entstehung eines magnetischen Feldes ohne einen makroskopischen Stromfluss zu verdeutlichen, bedienen wir uns an dieser Stelle eines sehr naiven Bildes.

Wir nehmen an, dass das Material, aus dem der Stabmagnet besteht, aus Atomen aufgebaut ist, die von Ladungsträgern – Elektronen – umkreist werden. Somit gibt es in dem Material viele mikroskopische Kreisströme. Diese sind normalerweise regellos orientiert so, dass es makroskopisch kein resultierendes Magnetfeld gibt.

Bei manchen Materialien kommt es nun auf Grund eines, als *Ferromagnetismus* bezeichneten Phänomens, zu einer Ausrichtung dieser mikroskopischen Kreisströme. Der resultierende Gesamtstrom erzeugt ein makroskopisch erfahrbares Magnetfeld. Im Falle eines Stabmagneten stellt dieses wieder ein Dipolfeld dar.

Anhand dieses Bildes lässt sich auch begründen, warum durch die Teilung eines Stabmagneten in ursprünglichen Nord- und Südpol nicht zwei magnetische Monopole entstehen. Die Unterscheidung zwischen den beiden Polen kommt nicht durch einen unterschiedlichen Aufbau der Materie, sondern lediglich durch Position innerhalb des Stabmagneten zu Stande. Somit entstehen bei der Teilung eines Stabmagneten zwei neue Magneten.

2.3 Das Magnetometer

Das bereits diskutierte, auf einen magnetischen Dipol wirkende, Drehmoment \vec{T}_{magn} auf Grund eines externen Feldes \vec{B} , kann nun zur Bestimmung dieses Feldes ausgenutzt werden.

Wir verwenden als Dipol einen Stabmagnet. Dieser hängt an einem *Torsionsfaden*, welcher an einem Drehteller aufgehängt ist. An dem Faden befindet sich ebenfalls ein starr mit dem Magneten verbundener Spiegel, um die Auslenkung des Magneten auf einer Projektionsfläche deutlicher sichtbar zu machen. Um den Magneten vor Lufterschütterungen zu schützen, ist der gesamte Aufbau von einem Plexiglaszylinder umgeben. Diesen Aufbau nennen wir Magnetometer.

Wirkt nun auf den Magneten ein Drehmoment \vec{T}_{magn} auf Grund eines äußeren Feldes, so wird der Faden verdrillt. Dadurch entsteht ein weiteres, \vec{T}_{magn} entgegen gerichtetes, Drehmoment \vec{T}_{tors} . Der Magnet dreht sich nun soweit, bis \vec{T}_{magn} durch \vec{T}_{tors} kompensiert wird. Dabei ist \vec{T}_{tors} proportional zum Torsionswinkel φ . Dieses Gleichgewicht wird beschrieben durch:

$$\vec{T}_{magn} = \vec{T}_{tors} \quad (3)$$

$$\vec{m} \times \vec{B} = \vec{e} D \varphi \quad (4)$$

Hierbei ist D die Torsionskonstante und \vec{e} ein Einheitsvektor in Richtung des Torsionsfadens. Es ist zu beachten, dass, da sich der Magnet nur in der horizontalen Ebene drehen kann, nur die horizontale Komponente des externen Feldes \vec{B}_h bestimmt werden kann.

Ist die Richtung dieser Komponente des zu messenden Magnetfeldes bekannt und die Stärke regulierbar, so bietet sich eine elegante Möglichkeit zur Vermeidung des Kreuzprodukts in Gl. 3. Dazu wird das Feld zunächst deaktiviert und der Stabmagnet senkrecht zur späteren Richtung des externen Feldes \vec{B}_h ausgerichtet. Nun wird der Magnet durch den Drehteller um einen Winkel φ verdreht und danach das externe Feld wieder aktiviert. Die Feldstärke dieses Feldes wird solange hochgeregelt, bis der Magnet wieder senkrecht zum Feld steht. In diesem Fall geht Gl. 3 bei Betrachtung der Beträge über in:

$$\begin{aligned} T_{magn} &= T_{tors} \\ mB &= D\varphi \end{aligned} \quad (5)$$

Dabei kann die Größe D/m durch eine Eichung mit einem bekannten Feld bestimmt werden.

2.4 Das Magnetfeld der Erde

Durch komplexe Vorgänge im Erdinneren wird auch die Erde von einem magnetischen Dipolfeld umgeben.

Lagern wir einen Stabmagneten horizontal und drehbar um eine vertikale Achse, so sollte der Nordpol des Magneten zum magnetischen Südpol der Erde zeigen. Dabei stellt sich heraus, dass der magnetische Südpol der Erde in etwa mit dem *geografischen Nordpol* und entsprechend der magnetische Nordpol mit dem *geografischen Südpol* übereinstimmt. Jedoch stimmen diese Pole nicht exakt überein. Die Abweichung der Richtung des Erdmagnetfeldes von der geografischen Nord-Süd-Richtung nennt man *Deklination*. Linien, die Orte gleicher Deklination verbinden, werden als *Isogonen* bezeichnet.

Wie bereits erwähnt, können wir mit einem Magnetometer nur die Horizontalkomponente \vec{B}_h eines Magnetfeldes und damit auch des Erdfeldes bestimmen. Um auch die Vertikalkomponente \vec{B}_v zu ermitteln, wird der Winkel zwischen einer Horizontalen und des gesamten Erdfeldes benötigt. Dieser kann mit einem *Inklinatorium* bestimmt werden und wird als *Inklination* bezeichnet. Linien die Orte gleicher Inklination verbinden heißen *Isoklinen*. Außerdem nennt man Linien die Orte gleicher Horizontalintensität verbinden *Isodynamen*.

2.4.1 Das Erdfeld in Göttingen

Aus dem Praktikumsskript kennen wir die Horizontalintensität $H_h = 0,189 \text{ Oe}$. Außerdem ist dort die Deklination $2,6^\circ$ westlich und die Inklination $66,7^\circ$ Nord gegeben.

Hieraus berechnen wir die Vertikalintensität:

$$H_v = H_h \tan(66,7^\circ) = 0.439 \text{ Oe}$$

Unter der Annahme einer *relativen Permeabilität* von $\mu_r = 1$, können wir hieraus auch den Betrag der *magnetischen Flussdichte* B berechnen:

$$B = \mu_0 \mu_r H$$

Mit den obigen Werten und der Umrechnung von Oerstedt [Oe] in Ampère pro Meter [A/m], wobei $1 \text{ A/m} = 4\pi \cdot 10^{-3} \text{ Oe}$, ergibt sich die magnetische Flussdichte in der Einheit Tesla [T]:

$$\begin{aligned} B_h &= 18,9 \cdot 10^{-6} \text{ T} \\ B_v &= 43,9 \cdot 10^{-6} \text{ T} \end{aligned}$$

2.5 Die Gaußschen Hauptlagen

Beim Einsatz eines Magnetometers nutzt man bei der Messung häufig das Magnetfeld eines bekannten Dipols, wie z. B. einer Spule, aus. Dabei wird das Magnetometer oft an fest definierten Positionen relativ zu dieser Spule positioniert. Diese Positionen nennt man *GAUSSsche Hauptlagen*. Im Folgenden werden wir das Dipolfeld an diesen Positionen theoretisch bestimmen.

2.5.1 Die erste Gaußsche Hauptlage

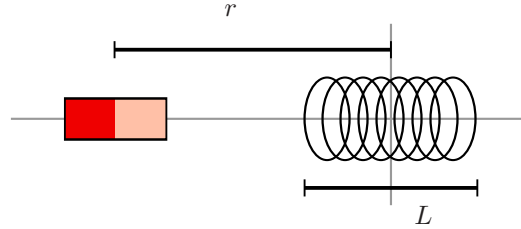


Abbildung 1: Erste GAUSSsche Hauptlage

In der *ersten GAUSSschen Hauptlage* befindet sich das Magnetometer auf der Symmetrieachse der Spule in einer Entfernung r vom Spulenmittelpunkt (siehe Abb. 1). Die Spule hat die Länge L und N Windungen.

An dieser Position hat das Magnetfeld nur eine Komponente parallel zu der Symmetrieachse. Um den Betrag dieser zu bestimmen bedienen wir uns der Analogie zwischen elektrischem und magnetischem Dipol. Die Geometrie des magnetischen Fernfeld der Spule entspricht somit der eines elektrischen Dipols bestehend aus zwei entgegengesetzten Ladungen Q und $-Q$. Dieses elektrische Feld beträgt nach dem *COULOMBSchen Gesetz*:

$$\begin{aligned} E &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{(r - L/2)^2} - \frac{1}{(r + L/2)^2} \right) \\ &= \frac{LQ}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \left(\frac{1}{1 - \frac{L^2}{2r^2} + \frac{L^4}{16r^4}} \right) \end{aligned}$$

Nun identifizieren wir LQ als elektrisches Dipolmoment und ersetzen es durch das magnetische Dipolmoment einer Spule aus Gl. 2. Um das magnetische Feld der Spule zu erhalten, müssen wir außerdem den konstanten Vorfaktor anpassen. In unserem Fall bedeutet dies ϵ_0 durch $1/\mu_0$ zu ersetzen:

$$B = \frac{NIA\mu_0}{2\pi} \frac{1}{r^3} \left(\frac{1}{1 - \frac{L^2}{2r^2} + \frac{L^4}{16r^4}} \right)$$

Bei einer kreisförmigen Spule mit dem Radius R ergibt sich:

$$B = \frac{NIR^2\mu_0}{2} \frac{1}{r^3} \left(\frac{1}{1 - \frac{L^2}{2r^2} + \frac{L^4}{16r^4}} \right) \quad (6)$$

2.5.2 Die zweite Gaußsche Hauptlage

In der *zweiten GAUSSschen Hauptlage* befindet sich das Magnetometer auf einer Ebene durch den Spulenmittelpunkt, senkrecht auf der Symmetrieachse der Spule (siehe Abb. 2). Die Entfernung vom Spulenmittelpunkt wird erneut mit r bezeichnet.

Zur Herleitung des Magnetfeldes verwenden wir wieder einen elektrischen Dipol. Wir berechnen zunächst den Betrag des elektrischen Feldes der positiven Ladung Q . Dieser ergibt sich nach *PYTHAGORAS* zu:

$$E_Q = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^2 + (L/2)^2} \right)$$

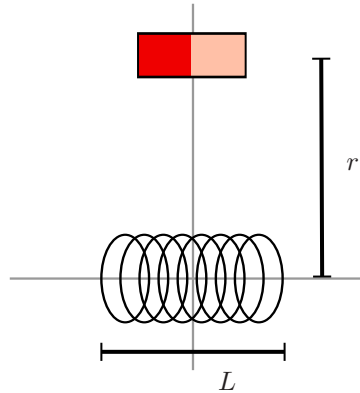


Abbildung 2: Zweite GAUSSsche Hauptlage

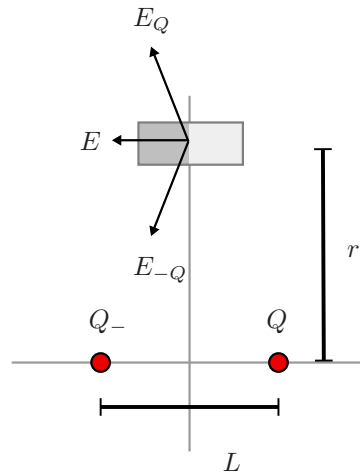


Abbildung 3: Feldstärken beim elektrischen Dipol

Addieren wir das Feld der Ladung $-Q$ hinzu, so ist das resultierende Feld parallel zur Symmetrieachse des Dipols. Der Betrag E ist die Summe der zur Symmetrieachse parallelen Komponenten von E_Q und E_{-Q} . Diese sind betragsmäßig gleich und verstärken sich. Um sie zu ermitteln, verwenden wir ähnliche Dreiecke (siehe Abb. 3):

$$\frac{L/2}{\sqrt{(L/2)^2 + r^2}} = \frac{E/2}{E_Q}$$

Somit folgt:

$$E = \frac{LQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \left(\frac{1}{\left(1 + \frac{L^2}{4r^2}\right)^{3/2}} \right) \quad (7)$$

Da wir uns lediglich mit dem Fernfeld beschäftigen, ist nun r viel größer als L . In guter Näherung folgt damit:

$$E = \frac{LQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3}$$

Übertragen wir dies wieder auf das magnetische Feld der Spule, so erhalten wir:

$$B = \frac{NIR^2\mu_0}{4} \frac{1}{r^3} \quad (8)$$

Wichtig ist an dieser Stelle den qualitativen Zusammenhang zwischen magnetischer Feldstärke B und dem Abstand r zu betrachten:

$$B \propto \frac{1}{r^3}$$

3 Durchführung

3.1 A - Magnetfeld von Spulen

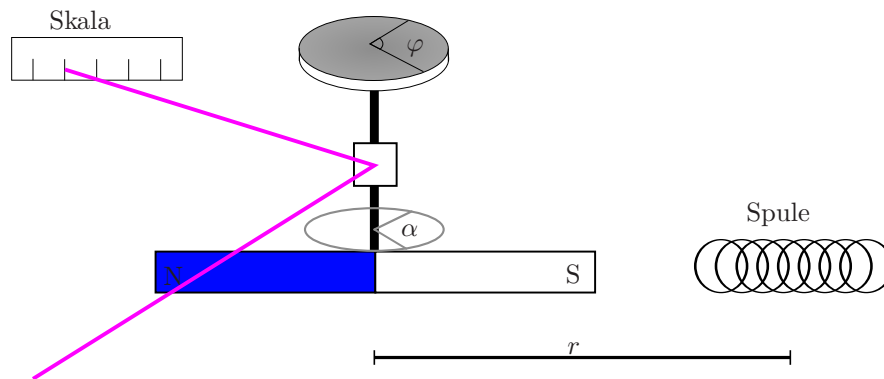


Abbildung 4: Schema des Aufbaus von Messung A

Um das Magnetfeld einer Spule zu vermessen bedienen wir uns des Aufbaus in Abb. 4. Es handelt sich also um einen Permanentmagneten, der über einen Torsionsfaden an einem Drehteller hängt. Mit dem Drehteller kann eine Nullauslenkung φ erreicht werden. Die aktuelle Auslenkung α kann durch einen, am Torsionsfaden befestigten Spiegel ermittelt werden.

Die Messung erfolgte in der zweiten Hauptlage, hierfür wurde zuerst die Nullage ohne Spule notiert, anschließend die Auslenkung mit dem Drehteller auf 5° eingestellt, die Spule in Position gebracht und der Strom I durch die Spule so lange erhöht, bis der Lichtzeiger wieder die Nullposition erreicht hatte. Diese Messung wurde für einige Abstände r und 2 verschiedene Spulen L_l und L_k durchgeführt.

3.2 B - Magnetfeld der Erde

Es sollte die Horizontalkomponente des Magnetfeldes ermittelt werden. Hierzu brachten wir die lange Spule L_l mit einer Kompassnadel in der ersten Hauptlage in Nord-Süd Richtung im Abstand von ca. $r = 75\text{cm}$. Dabei sollte der Südpol des Magneten nach Süden zeigen. Ohne Stromfluss in der Spule wurde nun zunächst eine Lage des Stabmagneten von 90° markiert. Anschließend wird er zurück in Nord-Süd Richtung gedreht und die Messung begonnen.

Bei verschiedenen Stromstärken zwischen 0 und 800mA wurde der für eine Kompensation auf 90° nötige Drehwinkel φ bestimmt.

4 Auswertung

4.1 Magnetfeld der Spule

Es gilt mit den Gl. 5 und 8

$$\begin{aligned} B &= \frac{NI d^2 \mu_0}{16} \frac{1}{r^3} \\ B &= \frac{D}{m} \varphi \\ \frac{\varphi}{NI d^2} &= c \cdot \frac{1}{r^3} \\ \log\left(\frac{\varphi}{NI d^2}\right) &= \log(c) - 3 \cdot \log(r) \end{aligned}$$

Plotten wir nun $\log\left(\frac{\varphi}{NI d^2}\right)$ gegen $\log(r)$ und fitten es linear, so entspricht der Anstieg dem Exponenten von r . Wir würden als Anstieg demzufolge 3 erwarten. Der Winkel φ ist wie in der Durchführung beschrieben 5° bzw. etwa $0,087 \text{ rad}$. Die Plots für die beiden Spulen sind in Abb. 5 zu finden.

Als Anstiege erhalten wir

$$\begin{aligned} m_l &= 2,56(3) \\ m_k &= 2,98(9) \end{aligned}$$

Mit der exakt gleichen Überlegung können wir nun auch die Entfernung zum Spulenende R analog auftragen. Da für R gilt:

$$R^2 = r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2,$$

ist für einen linearen Fit der gleiche Exponent zu erwarten (Abb. 6).

Hierbei erhalten wir

$$\begin{aligned} n_l &= 2,73(4) \\ n_k &= 2,98(9) \end{aligned}$$

Für die Regression wurden alle Werte als exakt angenommen. Die erhaltenen Fehler ergeben sich dann aus dem Regressionsverfahren.

Bilden wir das gewichtete Mittel aus allen 4 Werten, so ergibt sich

$$\bar{m} = 2.89(2),$$

also, bedenkt man die gemachten Näherungen, eine sehr gute Bestätigung der Theorie.

4.2 Erdmagnetfeld

Zuerst bestimmen wir die Auslenkung φ mittels

$$\varphi = \frac{\varphi_l + \varphi_k}{2}$$

und tragen dies gegen die Stromstärke I auf (Abb. 7). Da nach Gl. 5 und 6

$$B = \frac{NIR^2\mu_0}{2} \frac{1}{r^3} \left(\frac{1}{1 - \frac{l_l^2}{2r^2} + \frac{l_l^4}{16r^4}} \right) \text{ und}$$

$$\varphi \propto I$$

ist, haben wir dies linear mittels $\varphi = mI + n$ gefittet und bekommen

$$m = -0.000596(5)$$

$$n = 2.283(3) \text{ und damit eine Nullstelle}$$

$$I_0 = 3827(5)mA$$

Daraus können wir schließlich das Magnetfeld berechnen:

$$B = \frac{NI_0R^2\mu_0}{2} \frac{1}{r^3} \left(\frac{1}{1 - \frac{l_l^2}{2r^2} + \frac{l_l^4}{16r^4}} \right)$$

$$B = 114.4(2)\mu T$$

$$H \approx 1.14Oe$$

Der Fehlerwert berechnet sich über das Gesetz der Fehlerfortpflanzung aus dem Fehler von I_0 , welcher wiederum aus diesem Gesetz aus den Fehlern von m und n hervorgeht. Gefittet wurde, wie oben bereits beschrieben, mit großzügigen Fehlern von φ . Hierbei wurde, das von uns vorgegebene I als fehlerfrei interpretiert.

5 Einordnung der Ergebnisse

Wie bereits in der Auswertung erwähnt, ist das Ergebnis des ersten Versuchsteils sehr zufriedenstellend. Die Ergebnisse der Messungen mit der langen Spule erreichen jedoch nicht die mit der kurzen Spule erzielte Genauigkeit. Erfreulich ist, dass bei der langen Spule das Auftragen gegen den Abstand R zwischen Spulenende und Magnetometer zu einem signifikant besseren Ergebnis führt. In die hierbei zu Grunde liegende Gl. 7 gehen weniger Näherungsannahmen ein.

Der berechnete Wert der Horizontalkomponente des Erdmagnetfeldes weicht sehr stark (Faktor 10) vom Literaturwert ab. Dies deckt sich aber mit der Beobachtung von völlig verschieden gerichteten Magnetfeldern im Praktikumsraum. Wahrscheinlich haben wir das Feld einer Spule im Nebenraum oder aus dem Keller gemessen, keinesfalls aber das Erdmagnetfeld.

A Tabellen und Grafiken

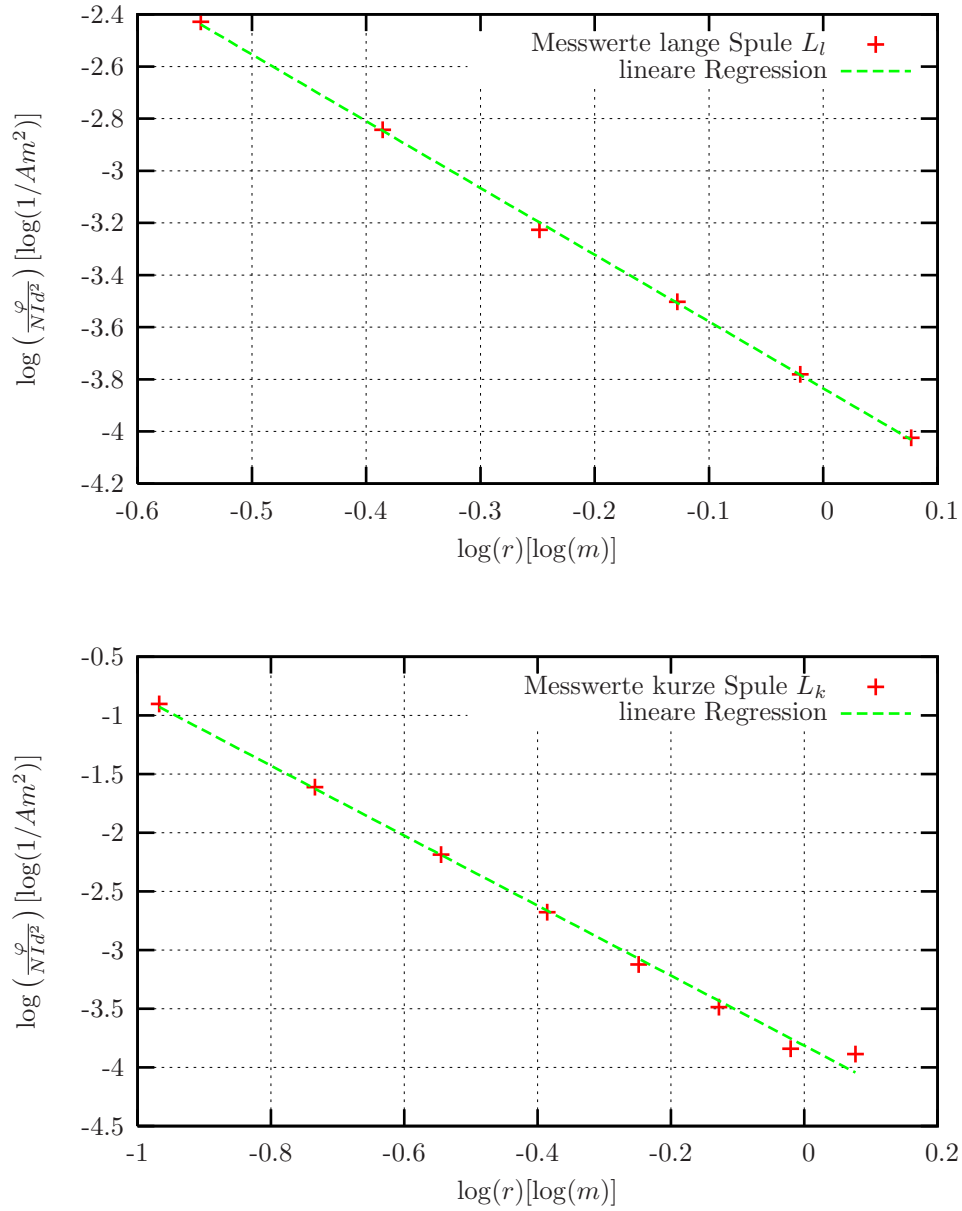


Abbildung 5: Plot und Fit der beiden Abstandsmessungen zur Spulenmitte

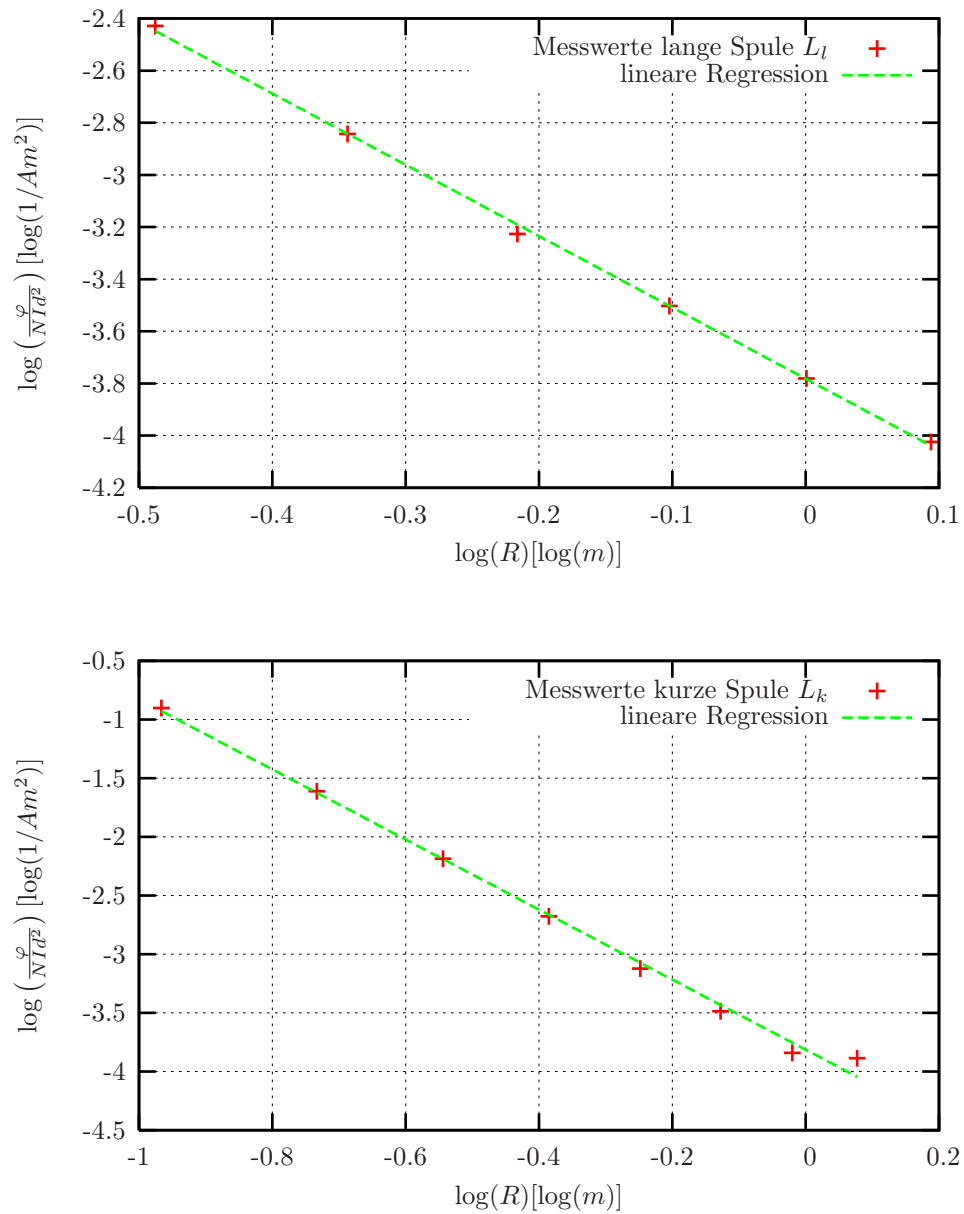


Abbildung 6: Plot und Fit der beiden Abstandsmessungen zum Spulenende

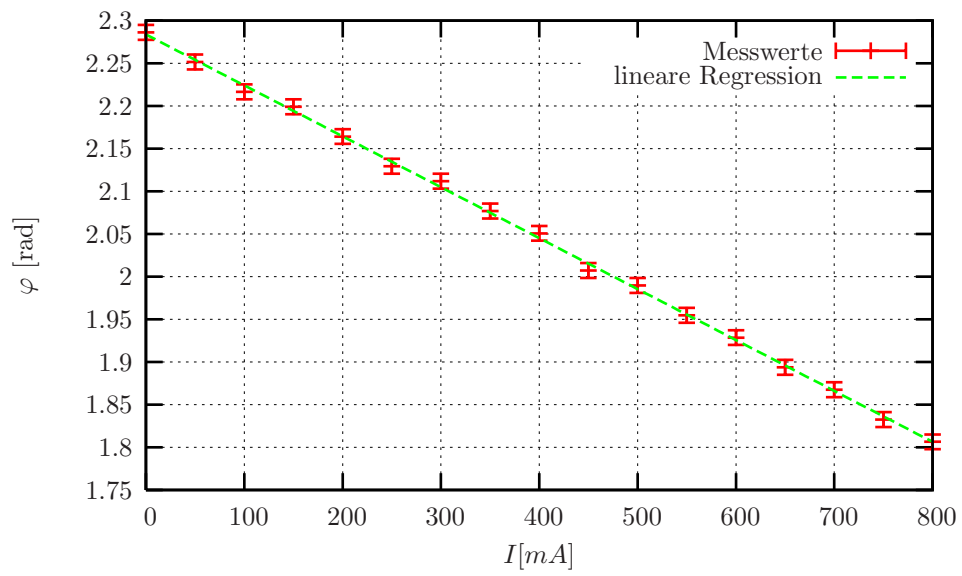


Abbildung 7: Auftragung des Erdmagnetfeldmessung