

Physikalisches A-Praktikum

Versuch 18

Der Transformator

Praktikanten: Nils Kanning
Steffen Klemer

Durchgeführt am: 20.09.2006

Gruppe: 6

Assistent: Boris Landgraf

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
2	Theorie	4
2.1	Leistung im Wechselstromkreis	4
2.2	Der Transformator	5
2.2.1	Der unbelastete Transformator	5
2.2.2	Der belastete Transformator	7
2.2.3	Verluste beim realen Transformator	9
2.3	Die Stromzange	9
3	Durchführung	9
3.1	Unbelasteter Transformator	9
3.2	Belasteter Transformator	10
3.3	Phasenverschiebung	10
4	Auswertung	10
4.1	Unbelasteter Transformator	10
4.2	Belasteter Transformator	10
4.3	Leistung des Transformators	11
4.4	Leistung im Leerlauf	12
5	Einordnung der Ergebnisse	12
A	Tabellen und Grafiken	13

1 Einleitung

Der in diesem Versuch untersuchte Transformator ist aus unserem alltäglichen Leben nur schwer wegzudenken. Wollen wir ein elektrisches Gerät mit Strom versorgen, so ist es zunächst einmal meist ein Transformator, den wir in die Steckdose stecken. Auch für den verlustarmen Transport elektrischer Energie über große Entfernungen in den Hochspannungsleitungen werden Transformatoren benötigt. In beiden Fällen stellt der Transformator eine effiziente Möglichkeit zur Umwandlung von Wechselspannungen dar.

2 Theorie

2.1 Leistung im Wechselstromkreis

Bevor wir auf die Funktionsweise eines Transformators eingehen betrachten wir zunächst die Leistung in einem Wechselstromkreis.

Im allgemeinen Fall besteht eine Phasenverschiebung φ zwischen der Spannung U und dem Strom I . Wir schreiben daher:

$$\begin{aligned} U(t) &= U_0 \cos(\omega t) \\ I(t) &= I_0 \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

Die momentane Leistung $P(t)$ ist nun:

$$P(t) = U(t) I(t) = U_0 \cos(\omega t) I_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

Mittelt man über eine Periode, so erhält man die mittlere Leistung P :

$$P = \frac{1}{T} U_0 I_0 \int_0^T \cos(\omega t) \cos(\omega t + \varphi) dt \quad (1)$$

$$= \frac{U_0 I_0}{2} \cos \varphi \quad (2)$$

Diese Größe wird auch als *Wirkleistung* P_w bezeichnet, da diese in andere Energieformen umgewandelt werden kann. Entsprechend definiert man die *Blindleistung* P_b als:

$$P_b = \frac{U_0 I_0}{2} \sin \varphi$$

Diese wird durch induktive oder kapazitive Elemente im Stromkreis hervorgerufen. Die sich bei einfacher Multiplikation von Spannung $U(t)$ und Strom $I(t)$ über die Zeit gemittelt ergebende Größe nennen wir *Scheinleistung* P_s :

$$P_s = \frac{U_0 I_0}{2}$$

Effektivwerte von Spannung und Stromstärke Nun stellen wir die Frage welche Gleichspannung U_{eff} und welchen Gleichstrom I_{eff} wir benötigen um eine zur Scheinleistung des Wechselstroms identische Leistung zu erzielen:

$$P_s = \frac{U_0 I_0}{2} = U_{eff} I_{eff}$$

Über das OHMsche Gesetz folgt damit:

$$U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$$

$$I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

Diese Größen bezeichnen wir als *Effektivwerte* von Spannung und Stromstärke.

Bei Messungen an einem Wechselstromkreis wird meist der Effektivwert der untersuchten Größe gemessen.

2.2 Der Transformator

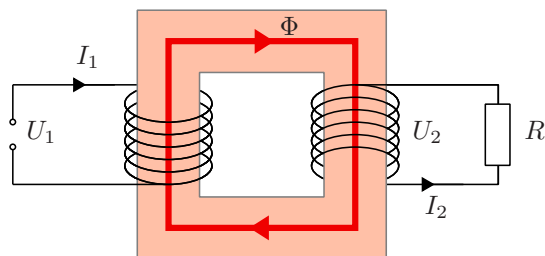


Abbildung 1: Der Transformator

Ein Transformator besteht aus zwei Spulen, die über einen Eisenkern induktiv gekoppelt sind. An einer Spule liegt eine Wechselspannung an. Diese wird als *Primärspule* und der Stromkreis als *Primärkreis* bezeichnet. Der durch die Primärspule fließende Strom erzeugt einen *magnetischen Fluss* im Eisenkern. Da dieser nun auch die zweite, die *Sekundärspule*, durchsetzt, wird im *Sekundärkreis* eine Spannung induziert. Wir werden später erfahren, dass dies im allgemeinen Fall auch Rückwirkungen auf den Stromfluss in der Primärspule hat. Das Verhältnis der Spannung im Primärkreis U_1 zu jener im Sekundärkreis U_2 hängt von den Windungszahlen der Spulen ab und kann somit hierüber variiert werden.

Wir werden im Folgenden meist einen *idealen Transformator* betrachten. Hierbei nehmen wir zunächst an, dass beide Spulen keinen OHMschen Widerstand haben. Außerdem liegt eine perfekte induktive Kopplung der Spulen vor.

2.2.1 Der unbelastete Transformator

Zunächst betrachten wir den unbelasteten Transformator. Dies bedeutet, dass der Sekundärkreis nicht geschlossen ist.

Am Primärkreis liegt eine Wechselspannung U_1 an. Diese erzeugt einen Strom I durch die Spule, welcher wiederum ein Magnetfeld in der Spule erzeugt:

$$B = \mu_0 \mu_r \frac{N_1}{l_1} I$$

Dabei ist N_1 die Windungszahl und l_1 die Länge der Spule. Bei einem Spulenquerschnitt A bedeutet dies für den magnetischen Fluss Φ durch die Spule:

$$\Phi = \int_A B dA' = BA = \mu_0 \mu_r \frac{N_1}{l_1} IA$$

Durch diesen Fluss wird nach der LENZschen Regel eine Spannung in der Primärspule induziert, die der Flussänderung entgegenwirkt:

$$U_{ind} = -N_1 \dot{\Phi}$$

Hierbei werden durch den Faktor N_1 die Windungen der Spule berücksichtigt, da der magnetische Fluss so die Fläche $N_1 A$ durchsetzt.

Mit Hilfe der Maschenregel können wir nun die induzierte Spannung U_{ind} durch die externe Spannung U_1 ausdrücken:

$$U_1 + U_{ind} = 0 \quad (3)$$

Somit gilt schließlich:

$$U_1 = N_1 \dot{\Phi} \quad (4)$$

Nun betrachten wir die Sekundärspule. Da wir einen idealen Transformator diskutieren und somit eine perfekte induktive Kopplung vorliegt, durchquert der gesamte Fluss Φ auch die Sekundärspule mit N_2 Windungen. Wir nehmen nun an, dass der Wicklungssinn beider Spulen identisch ist. In der Sekundärspule wird jetzt ebenfalls eine Spannung $U_{ind'}$ induziert:

$$U_{ind'} = -N_2 \dot{\Phi}$$

Da der Sekundärkreis nicht geschlossen ist, fließt allerdings durch die Sekundärspule kein Strom. Messen wir nun die Spannung U_2 an den Enden der Sekundärspule, so gilt:

$$U_2 = U_{ind'} = -N_2 \dot{\Phi} \quad (5)$$

Auf Grund von Gl. 4 und Gl. 5 können wir eine Relation zwischen der Primär- und Sekundärspannung herstellen:

$$U_2 = -\frac{N_2}{N_1} U_1 \quad (6)$$

Das negative Vorzeichen macht deutlich, dass U_1 und U_2 um π phasenverschoben sind.

Betrachten wir nur die Effektivwerte der Spannungen, so bedeutet dies:

$$\frac{U_{1,eff}}{U_{2,eff}} = \frac{N_1}{N_2} = u \quad (7)$$

Gleiches gilt auch für die Maximalwerte. u bezeichnet man auch als *Übersetzungsverhältnis*.

Schließlich gehen wir nun noch auf die Wirkleistung dieses Aufbaus ein. Da im Primärkreis nur ein induktiver Widerstand vorhanden ist, sind Primärspannung und Primärstrom um $\pi/2$ phasenverschoben. Aus Gl. 1 folgt damit, dass keine Wirkleistung aufgenommen wird. Wegen der vollständigen Kopplung steht die gesamte Leistung im Sekundärkreis zur Verfügung. Da aber kein Strom fließt ist auch hier keine Leistung vorhanden.

Bei einem realen Transformator ist die Phasenverschiebung zwischen Primärspannung und Strom im allgemeinen kleiner als $\pi/2$. Dies begründen wir mit einem OHMschen Widerstand der Primärspule.

2.2.2 Der belastete Transformator

An dieser Stelle betrachten wir nun den Fall, dass der Sekundärkreis geschlossen ist und sich ein OHMScher Verbraucher mit dem Widerstand R in diesem befindet.

Genauso wie im Fall des unbelasteten Transformators sorgt die Primärspannung U_1 für einen magnetischen Fluss im Eisenkern. Diesen bezeichnen wir nun mit Φ_1 . In der Sekundärspule fließt nach der LENZschen Regel ein Strom, der der Flussänderung $\dot{\Phi}_1$ entgegenwirkt. Durch diesen Strom entsteht ein weiterer Fluss Φ_2 im Eisenkern. Bis zu diesem Schritt der Betrachtung ist der Gesamtfluss im Eisenkern somit $\Phi_1 + \Phi_2$.

Da die Primärspannung U_1 und somit auf Grund der Maschenregel (Gl. 3) auch die in der Primärspule induzierte Spannung jedoch konstant bleiben soll, muss der gesamte Fluss durch die Primärspule weiterhin Φ_1 sein. Somit muss zu dem, ohnehin vorhandenen, Strom I_1 ein weiterer Primärstrom I'_1 entstehen, der den Fluss Φ_2 ausgleicht.

Um den Strom I'_1 zu quantifizieren betrachten wir die Leistungen. Auf Grund der vollständigen Kopplung steht die Wirkleistung des Primärkreises P_p vollständig im Sekundärkreis als P_s zur Verfügung:

$$P_p = P_s$$

$$\int_0^T U_1(I_1 + I'_1)dt = \int_0^T U_2 I_2 dt$$

Wie beim unbelasteten Transformator sind U_1 und I_1 um $\pi/2$ phasenverschoben und somit ist die Wirkleistung dieses Beitrags Null:

$$\int_0^T U_1 I'_1 dt = \int_0^T U_2 I_2 dt$$

Mit Effektivwerten bedeutet dies:

$$U_{1,eff} I'_{1,eff} = U_{2,eff} I_{2,eff}$$

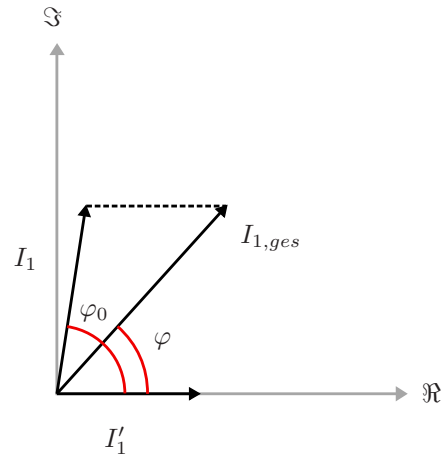
Da der Fluss Φ_2 kompensiert wird, ist der Gesamtfluss durch die Sekundärspule schließlich doch Φ_1 . Somit gilt für die Spannung im Sekundärkreis die Gleichung aus dem unbelasteten Fall (Gl. 5). Da folglich auch Gl. 6 weiterhin Bestand hat schließen wir:

$$I'_1 = -\frac{N_2}{N_1} I_2 \quad (8)$$

Da der Sekundärkreis nur durch einen OHMSchen Verbraucher belastet wird, sind U_2 und I_2 in Phase. Da U_1 und U_2 gegenphasig sind (Gl. 6), sind wegen des negativen Vorzeichens in Gl. 8 U_1 und I'_1 in Phase. Aus diesem Grund macht Gl. 8 eine allgemeine Aussage über das Verhältnis der *Wirkströme* – der Ströme die in Phase mit der jeweiligen Spannung sind – eines Transformators.

Schließlich ist noch die Phasenverschiebung φ des Gesamtstroms im Primärkreis $I_{1,ges} = I_1 + I'_1$ zur Spannung U_1 von Interesse. Bei dieser Betrachtung entfernen wir uns nun ein Stück weit von den oben gemachten Annahmen und gehen allgemein von einer Phasenverschiebung φ_0 zwischen U_1 und I_1 aus. Da I'_1 in Phase mit U_1 ist besteht unsere Aufgabe darin die Phasenverschiebung zwischen $I_1 + I'_1$ und I'_1 zu bestimmen. Betrachtet man die Größen in einem Zeigerdiagramm (siehe Abb. 2) so folgt:

$$\tan \varphi = \frac{I_{1,eff} \sin \varphi_0}{I'_{1,eff} + I_{1,eff} \cos \varphi_0} \quad (9)$$

Abbildung 2: Phasenverschiebung zwischen U_1 und $I_{1,ges}$

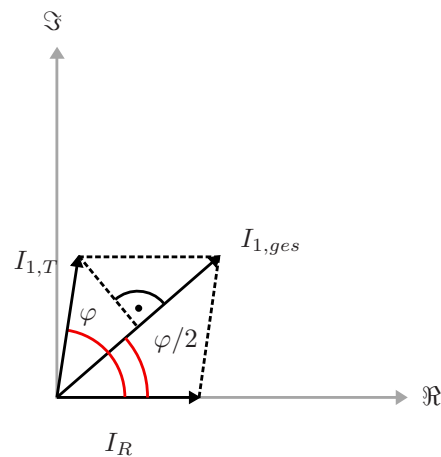
Gleiches gilt für die Maximalwerte der Größen.

Hieraus können wir auch die Wirkleistung im Primärkreis berechnen:

$$P_p = U_{1,eff} I_{1,ges,eff} \cos \varphi$$

Diese entspricht im Idealfall wieder der im Sekundärkreis:

$$P_p = P_s = U_{2,eff} I_{2,eff}$$

Abbildung 3: Phasenverschiebung zwischen U_1 und $I_{1,ges}$ in der im Versuch verwendeten Schaltung

Im Versuch verwendete Schaltung Wie später noch erläutert wird, werden wir in einem Fall parallel zur Primärspule einen OHMSchen Widerstand R schalten. Wir betrachten nun den Fall, dass der Strom durch diesen OHMSchen Widerstand $I_{1,R}$ die gleiche Amplitude wie der Strom durch die Primärspule $I_{1,T}$ hat. Der Gesamtstrom $I_{1,ges}$ im Primärkreis ergibt sich durch Addition beider Einzelströme unter Berücksichtigung der verschiedenen Phasen. In Abb. 3 ist dieser Zusammenhang mit komplexen Größen verdeutlicht. Ebenfalls aus dieser Abbildung geht eine

Relation zur Bestimmung der Phasenverschiebung φ zwischen dem Strom $I_{1,R}$ und U_1 hervor:

$$\cos(\varphi/2) = \frac{I_{1,ges}}{2I_{1,R}}$$

2.2.3 Verluste beim realen Transformator

Bei der Betrachtung der Verluste eines realen Transformators muss zwischen verschiedenen Ursachen unterschieden werden. Zunächst wurden die OHMSchen Widerstände der Spulen außer Acht gelassen. Außerdem entsteht trotz der relativ hohen relativen Permeabilität des Eisenkerns auch ein schwaches Feld außerhalb von diesem. Dadurch durchsetzt nicht der gesamte von einer Spule erzeugte magnetische Fluss auch die andere Spule. Eine weitere Ursache sind Wirbelströme die sich im Eisenkern auf Grund des magnetischen Flusses ausbilden. Diese erwärmen den Eisenkern, wofür Energie benötigt wird. Dieser Ursache kann jedoch durch einen aus vielen dünnen isolierten Schichten aufgebauten Eisenkern entgegengewirkt werden. Durch die ständige Änderung der Richtung des magnetischen Flusses durch den Eisenkern kommt es auch zu Hystereseverlusten.

All dies führt bei einem realen Transformator dazu, dass die im Primärkreis entnommene Leistung nicht vollständig im Sekundärkreis zur Verfügung steht. Allerdings erweisen sich die aufgezählten Faktoren bei gut konstruierten Transformatoren als sehr gering und der Transformator stellt somit eine sehr effiziente Möglichkeit zur Wandlung von Spannungen dar.

2.3 Die Stromzange

Mit Hilfe einer Stromzange können Wechselströme ohne zuvor den Stromkreis unterbrechen zu müssen gemessen werden. Sie stellt eine Anwendung des bis hierhin diskutierten Prinzips des Transformators dar. Der zu untersuchende Leiter übernimmt dabei die Rolle der Primärspule. Dieser wird durch die Stromzange von einem Eisenkern umschlossen. Außerdem ist um den Eisenkern eine Sekundärspule gewickelt. Fließt nun durch den Leiter ein Strom, so wird auch in der Sekundärspule ein Strom induziert. Dieser kann gemessen werden, wodurch sich dann auch die Stärke des Stroms durch den Leiter bestimmen lässt.

3 Durchführung

Im Folgenden bezeichnet Spule 1 die eigentliche Primärspule, Spule 2 die Sekundärspule.

3.1 Unbelasteter Transformator

Zuerst wurden für ca. 20 verschiedene Spannungen die Stromstärke am unbelasteten Trafo in und über Spule 1 gemessen.

Nun konnte U_2 in Abhängigkeit von U_1 für einige Werte gemessen werden. Und nach einem Vertauschen der Aufgaben der beiden Spulen auch umgekehrt.

3.2 Belasteter Transformator

Nach einem erneuten Tausch, so dass Spule 1 wieder ihre Primäraufgabe bekam, wurde der Transformator mit einer regelbaren ohmschen Last im Sekundärkreis vermessen. Hierfür wurden 6 verschiedene Sekundärströme $I_2 = 0..5A$ eingestellt, der zugehörige Strom I_1 gemessen, dann die Spule 1 gegen ein Potentiometer ersetzt. Dieses wurde so eingeregelt, dass I_1 so groß war, wie zuvor. Schließlich wurde die Spule 1 wieder dazugeschaltet und der Gesamtstrom I_{ges} bestimmt. I_1 sowie I_{ges} wurden notiert. Die Messung geschah bei 200V im Primärkreis.

3.3 Phasenverschiebung

Für 6 verschiedene ohmsche Lasten im Sekundärkreis wurde diesmal die Phasenverschiebung zwischen U_1 und U_2 als LISSAJOUS-Figuren mit einem Oszilloskop aufgenommen.

4 Auswertung

4.1 Unbelasteter Transformator

In Abb. 4 ist der gemessene $U_1 - I_1$ Verlauf aufgetragen.

Es ist gut zu erkennen, dass der Anstieg zu Beginn sehr linear verläuft, sich dann aber zugunsten eines wesentlich höheren Stromes verschiebt. Dies lässt sich nur mit einer Verringerung des Wechselstromwiderstandes $X_L = \omega L$, bedingt durch eine Sättigung des Eisenkernes und somit Absinken der Induktivität L erklären. Dieser Sachverhalt wird in der Theorie des idealen Transformators nicht beachtet.

Abb. 5 sowie 6 zeigen jeweils einen linearen Fit der Spannungsmessungen. Die daraus ermittelten Anstiege sind

$$\begin{aligned} u_1 &= 0.0949(2) \\ u_2 &= 10.399(6) \\ \bar{u} &= \frac{u_1 + \frac{1}{u_2}}{2} = 0.0955(3). \end{aligned} \quad (10)$$

Die Fehler ergeben sich aus den Fehlern der jeweils als Ordinate aufgetragenen Größe und für den Mittelwert über die Fehlerfortpflanzung. Die verwendeten Messgeräte haben einen Fehler in der Spannungsmessung von 1%+3 Digits und in der Stromstärkemessung von 1.5%+5 Digits.

4.2 Belasteter Transformator

In 2.2.2 haben wir gesehen, dass gilt:

$$\cos(\varphi/2) = \frac{I_{ges}}{2I_1}$$

Dies haben wir verwendet um die Phasenverschiebungen, bei den verschiedenen I_2 zu bestimmen. Die Ergebnisse sind in Tab. 1 zu finden. Der Fehler ergibt sich jeweils über das Gesetz der Fehlerfortpflanzung aus den Varianzen von I_1 und I_{ges} .

Wir konnten mit diesem Verfahren leider nur die Phasenverschiebungen für die Sekundärströme $U_2 = 0 \text{ A}$ und $U_2 = 1 \text{ A}$ ermitteln. Für größere Ströme ging die Phasenverschiebung bei unseren Messungen sehr schnell gegen 0. Auf Grund von Messungenauigkeiten liegt mit unseren Messwerten das Verhältnis $I_{ges}/2I_1$ für diese Werte nicht wie erwartet knapp unter, sondern etwas über 1. Von dieser Größe können wir jedoch nicht den arccos bilden und somit keine Phasenverschiebung berechnen.

Aus den x-y-Oszilloskop Bildern lässt sich ebenfalls eine Phasenverschiebung mittels

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{b}{I}\right),$$

wobei b der Abstand der beiden y-Schnittpunkte und I die y-Ausdehnung beschreibt, bilden. Dies geht leicht aus einer Betrachtung der beiden Formeln an einem Punkt $U = 0$ hervor.

$$\begin{aligned} U &= 0 = U \cdot \sin(\omega t) \\ I &= b = I \cdot \sin(\omega t + \varphi) \\ \Rightarrow \omega t &= n\pi \\ \Rightarrow \sin(\varphi) &= \pm \frac{b}{I}. \end{aligned}$$

Da der Ausdruck recht grobixelig war und wir das genaue Auflösungsvermögen des Oszilloskops nicht kennen, geben wir für die ermittelten Werte keine Fehler an. Die sich durch Ausmessen mit einem Lineal ergebenden liegen bei ca. 2%.

Theoretisch können wir die Phasenverschiebung aus Gl. 9 bestimmen:

$$\tan \varphi = \frac{I_1 \sin \varphi_0}{I'_1 + I_1 \cos \varphi_0}$$

Zusammen mit Gl. 8 und dem bereits bestimmten Übersetzungsverhältnis (Gl. 10) ergibt sich:

$$\tan \varphi = \frac{I_1 \sin \varphi_0}{\frac{1}{u} I_2 + I_1 \cos \varphi_0}$$

Wir stellen dies um zu:

$$\varphi = \arctan \frac{I_1 \sin \varphi_0}{\frac{1}{u} I_2 + I_1 \cos \varphi_0}$$

Hierbei ist φ_0 die aus der Multimetermessung bestimmte Phasenverschiebung bei einem Sekundärstrom $I_2 = 0 \text{ A}$. I_1 ist der Primärstrom bei diesem Sekundärstrom.

Die sich ergebende Funktion wurde zusammen mit den beiden Messungen in Abb. 7 als theoretische Referenz geplottet.

4.3 Leistung des Transformators

Bei $I_2 = 5 \text{ A}$ hat der Transformator im Primärkreis eine Wirkleistung sowie Blindleistung von

$$\begin{aligned} P_w &= U_1 \cdot I_1 \cos \varphi = 97(4) \text{ W} \\ P_b &= U_1 \cdot I_1 \sin \varphi = 0,214(9) \text{ W}. \end{aligned}$$

4.4 Leistung im Leerlauf

Bei einem sich im Leerlauf befindenen Transformator handelt es sich um einen unbelasteten Transformator. Dies bedeutet der Sekundärstrom ist $U_2 = 0 \text{ A}$. Bei einer Primärspannung $U_1 = 200 \text{ V}$ berechnen wir die Wirkleistung im Primärkreis analog zum vorherigen Auswertungsschritt aus den gemessenen Werten und der berechneten Phasenverschiebung:

$$P_w = U_1 I_1 \cos \varphi = 200 \text{ V} \cdot 0,12 \text{ A} \cdot \cos(75^\circ) = 6,1 \text{ W}$$

Mit einem Strompreis von 0,20 EUR /kWh ergeben sich so jährliche Kosten von 10,70 EUR.

5 Einordnung der Ergebnisse

Die Messungen am unbelasteten Transformator stellten sich als problemlos heraus. Auch die Auswertung liefert die gewünschten Proportionalitäten.

Zur Messung am belasteten Transformator ist der schnelle Abfall der Phasenverschiebung zu vermerken. Erfreulich dabei ist, dass dieses Phänomen bei der Messung am Multimeter auch durch die theoretische Bestimmung der Phasenverschiebung bestätigt wird. Unser Problem bei der Bestimmung der Phasenverschiebung aus den Messwerten hätten wir eventuell durch einen genaueren Messbereich eines anderen Messgerätes vermeiden können.

Die mit dem Oszilloskop ermittelten Lissajous-Figuren bestätigen sowohl qualitativ als auch quantitativ die Beziehung zwischen dem Sekundärstrom und der Phasenverschiebung im Primärkreis.

A Tabellen und Grafiken

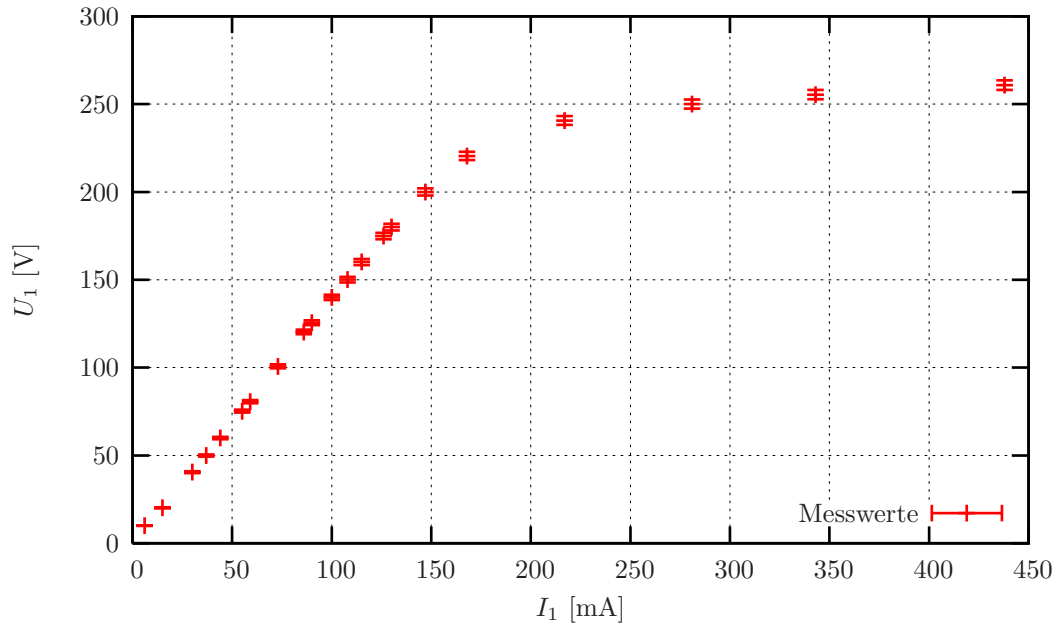


Abbildung 4: Primärspannung über Primärstromstärke am unbelasteten Transformator

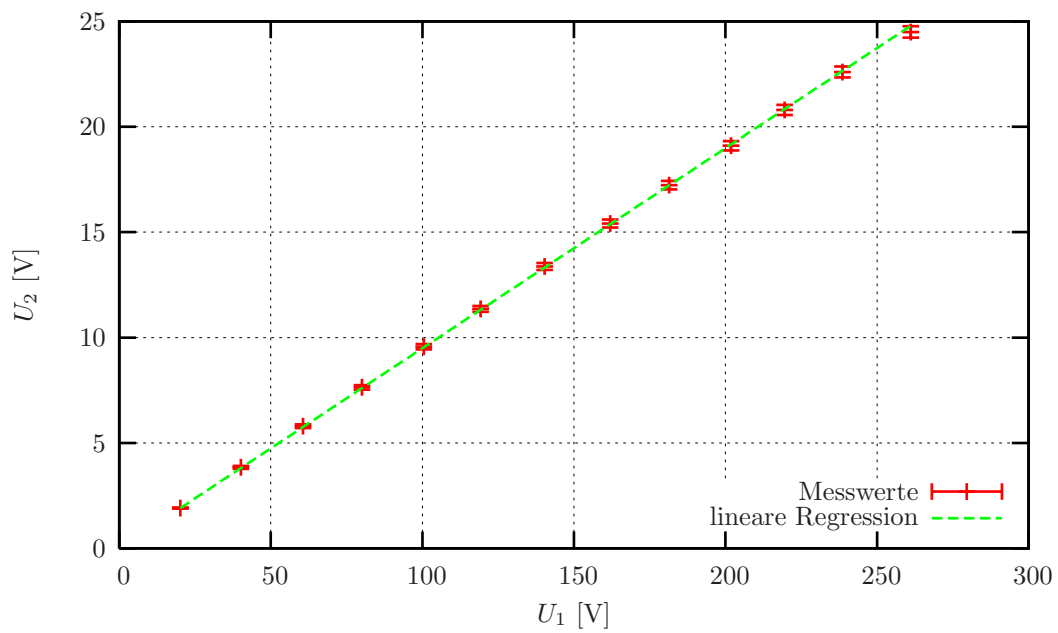


Abbildung 5: Verhältnis der Spannungen

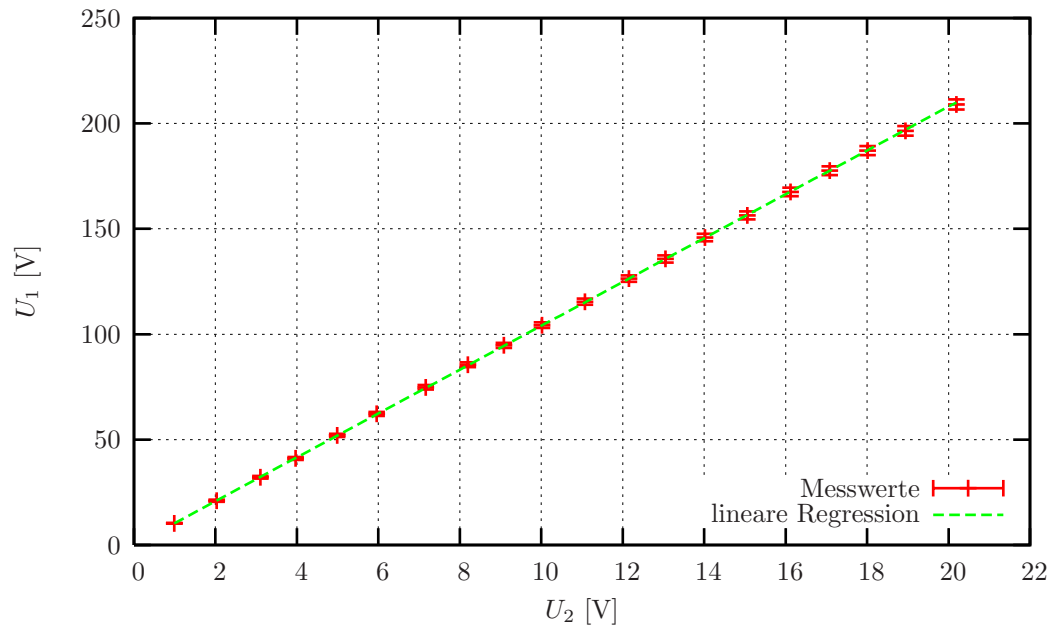


Abbildung 6: Verhältnis der Spannungen mit getauschten Spulen

I_2 [mA]	0	1	2	3	4	5
$\varphi_{Lissajous}$ [°]	62.20	23.58	9.59	4.38	0.603	0.462
$\varphi_{Multimeter}$ [°]	75(38)	47(44)	-	-	-	-

Tabelle 1: Phasenverschiebung zwischen U_1 und I_1

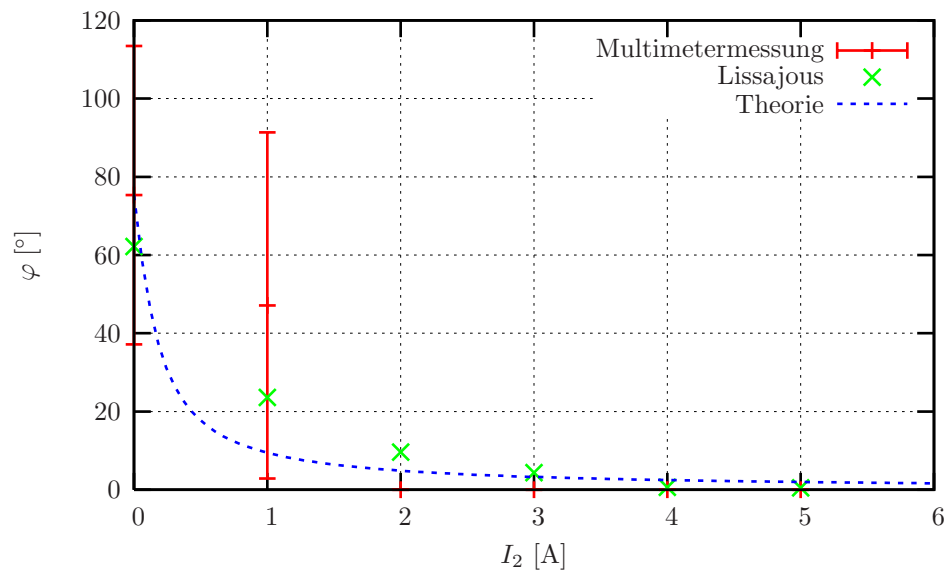


Abbildung 7: Die Phasenverschiebung zwischen U_1 und I_1 als Funktion des Belastungsstromes I_2