

Physikalisches A-Praktikum

Versuch 23

Das Prismen- und Gitterspektrometer

Praktikanten: Nils Kanning
Steffen Klemer

Durchgeführt am: 14.02.2007

Gruppe: 6

Assistent: Till Benter

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
2	Theorie	4
2.1	Spektrographen	4
2.2	Kohärentes Licht	4
2.3	Prismenspektrographen	5
2.3.1	Fraunhofersche Formel	5
2.3.2	Dispersion und Winkeldispersion	7
2.3.3	Auflösungsvermögen	7
2.4	Gitterspektrographen	9
2.4.1	Winkeldispersion	9
2.4.2	Auflösungsvermögen	10
3	Durchführung	10
3.1	Prismenspektrometer	10
3.2	Gitterspektrometer	11
4	Auswertung	11
4.1	Prismenspektrometer	11
4.1.1	Spaltbreite	14
4.1.2	Auflösungsvermögen des Spektrometers	14
4.2	Gitterspektrometer	15
4.2.1	Ablenkwinkel	15
4.2.2	Gitterkonstante	15
4.2.3	Die Wellenlängendifferenz	15
4.2.4	Das Auflösungsvermögen	16
4.2.5	Wellenlänge der blauen Linie	16
5	Einordnung der Ergebnisse	16
A	Tabellen und Grafiken	17

1 Einleitung

In den 1920er Jahren begann die Entwicklung der Quantenmechanik zunächst im Bereich der Atomphysik. Man versuchte auf Grund der von Atomen ausgesandten Strahlung Rückschlüsse auf die innere Struktur dieser Atome zu ziehen. Dabei stellte die Spektrographie ein unverzichtbares Hilfsmittel zur Analyse der Strahlung dar.

Heutzutage setzt man Spektrographen auch zur Erforschung von Sternen ein. Über die erhaltenen Ergebnisse kann dann die Zusammensetzung des Sterns beschrieben werden.

In diesem Versuch werden wir zwei verschiedene Spektrographen, ein Prisma und ein Gitter, zur Untersuchung der Strahlung einer Quecksilberdampfampe einsetzen.

2 Theorie

2.1 Spektrographen

Ein *Spektrograph* ist ein optisches Gerät zur Analyse des Spektrums von Licht. Hierzu wird das Licht in Anteile verschiedener Wellenlängen zerlegt. Das heißt die Lichtausbreitung wird so beeinflusst, dass Licht verschiedener Wellenlängen den Spektrographen auch in verschiedenen Winkeln verlässt. Auf Grund dieser Winkel kann nun die Wellenlänge der in einer Richtung gemessenen Lichtintensität berechnet werden.

Wir werden uns in diesem Versuch, wie bereits in der Einleitung erwähnt, mit zwei verschiedenen Spektrographen beschäftigen. Sie basieren beide auf unterschiedlichen physikalischen Phänomenen, die für die Zerlegung der Lichts sorgen.

Der *Prismenspektrograph* beruht auf der *Dispersion*. Dies bedeutet, dass Licht unterschiedlicher Wellenlänge auch unterschiedlich stark gebrochen wird. Beim *Gitterspektrographen* spielt hingegen die *Beugung* und die Abhängigkeit der Intensitätsmaxima von der Wellenlänge die entscheidende Rolle.

2.2 Kohärentes Licht

Unter *kohärentem Licht* versteht man Lichtwellen, die zueinander keine Phasenverschiebung haben.

Die Gitterspektrographie beruht auf Beugung und damit auf Interferenzerscheinungen, die von der Phasenverschiebung zwischen den Lichtwellen beeinflusst werden. Daher ist für dieses Verfahren kohärentes Licht notwendig. Ein Prismenspektrograph lässt sich auf den ersten Blick mittels der geometrischen Optik beschreiben. Wir werden jedoch später feststellen, dass zur Bestimmung des Auflösungsvermögens eines solchen Spektrographen auch Beugungsphänomene in Acht gezogen werden müssen. Somit ist auch hier die Kohärenz des Lichts von Bedeutung.

Die im Versuch verwendete Quecksilberdampfampe erzeugt zunächst inkohärentes Licht. Dieses wird nun mit Hilfe einer Linse auf einen Spalt fokussiert. Nach dem *Huygenschen Prinzip* können wir, bei hinreichend geringer Spaltbreite, die Spaltöffnung als Ausgangspunkt einer neuen Elementarwelle betrachten. Das Licht dieser Quelle ist nun kohärent und wird mit einer weiteren Linse noch parallelisiert.

2.3 Prismenspektrographen

Beim Prismenspektrographen wird nun ein *optisches Prisma* in dieses kohärente Licht gebracht. Der das Prisma verlassende Lichtstrahl wird mit einer Linse in ein Okular fokussiert (siehe Abb. 4).

Die Grundfläche eines Prismas ist ein gleichschenkliges Dreieck. Dabei stehen die beiden *brechenden Flächen* des Prismas auf den beiden gleichen Schenkeln des Dreiecks und schließen die *brechende Kante* ein. Der Winkel zwischen diesen Flächen wird *brechender Winkel* genannt und im Folgenden mit ε bezeichnet. Die Gegenüberliegende Fläche heißt *Basis*. Den Brechungsindex des Prismas bezeichnen wir mit n und nehmen weiter an, dass die das Prisma umgebende Luft den Brechungsindex $n_0 = 1$ hat.

Unser Ziel ist es nun eine Abhängigkeit zwischen dem Winkel unter dem einfallendes Licht das Prisma verlässt und der Wellenlänge λ des Lichts zu bestimmen. Wir werden hierbei eine einschränkende Bedingung an den Strahlengang durch das Prisma stellen und erhalten dabei als wichtigen Zwischenschritt die *Fraunhofersche Formel*.

2.3.1 Fraunhofersche Formel

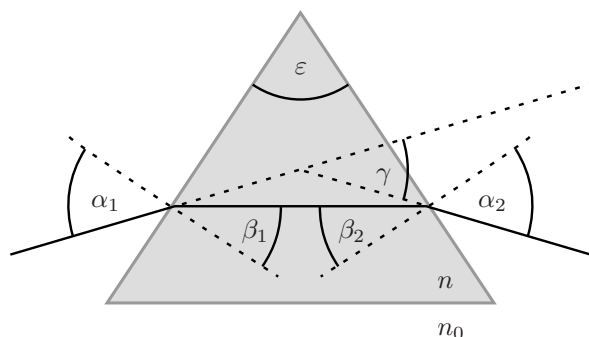


Abbildung 1: Strahlengang im Prisma

Zunächst führen wir die in Abb. 1 dargestellten Winkel ein. Dabei ist α_1 der Einfallswinkel eines ankommenden Lichtstrahls und α_2 der Ausfallswinkel. Der Winkel γ beschreibt die Gesamtablenkung eines Strahls. Weiter sind β_1 und β_2 die bei den beiden Brechungsvorgängen auftretenden Winkel.

Der Abbildung entnehmen wir die Beziehung:

$$\pi = \varepsilon + (\pi/2 - \beta_1) + (\pi/2 - \beta_2)$$

Es gilt also:

$$\varepsilon = \beta_1 + \beta_2 \quad (1)$$

Da ε konstant ist, liefert die Differentiation:

$$\frac{d\beta_1}{d\beta_2} = -1 \quad (2)$$

Auf Grund der Geometrie der Anordnung gilt ebenso:

$$\begin{aligned}\gamma &= (\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2) \\ &= \alpha_1 + \alpha_2 - \beta_1 - \beta_2 \\ &= \alpha_1 + \alpha_2 - \varepsilon\end{aligned}\tag{3}$$

Wir stellen nun die bereits angedeutete Bedingung an den Strahlengang und nehmen an, dass der Gesamtablenkungswinkel γ minimal ist. Das bedeutet bei einer infinitesimalen Änderung des Einfallswinkels α_1 bleibt der Ablenkungswinkel γ konstant:

$$0 = \frac{d\gamma}{d\alpha_1} = 1 + \frac{d\alpha_2}{d\alpha_1}$$

Somit erhalten wir:

$$\frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} = -1\tag{4}$$

Da wir als Brechungsindex der Luft $n_0 = 1$ angenommen haben, werden die beiden Brechungen nach dem *Snelliusschen Gesetz* durch folgende Formeln beschrieben:

$$\begin{aligned}\sin \alpha_1 &= n \sin \beta_1 \\ \sin \alpha_2 &= n \sin \beta_2\end{aligned}$$

Die Differentiation nach α_1 bzw. α_2 liefert:

$$\begin{aligned}\cos \alpha_1 d\alpha_1 &= n \cos \beta_1 d\beta_1 \\ \cos \alpha_2 d\alpha_2 &= n \cos \beta_2 d\beta_2\end{aligned}$$

Wir erhalten hieraus den Quotienten:

$$\frac{\cos \alpha_1 d\alpha_1}{\cos \alpha_2 d\alpha_2} = \frac{\cos \beta_1 d\beta_1}{\cos \beta_2 d\beta_2}$$

Unter Verwendung von Gl. 2 und Gl. 4 ergibt dies:

$$\frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_2} = \frac{\cos \beta_1}{\cos \beta_2}$$

Durch Anwendung der Identität $\sin^2 \xi + \cos^2 \xi = 1$ folgt:

$$\frac{1 - \sin^2 \alpha_1}{1 - \sin^2 \alpha_2} = \frac{1 - \sin^2 \beta_1}{1 - \sin^2 \beta_2}$$

Eine erneute Anwendung des Snelliusschen Gesetzes liefert schließlich:

$$\frac{1 - \sin^2 \alpha_1}{1 - \sin^2 \alpha_2} = \frac{n^2 - \sin^2 \alpha_1}{n^2 - \sin^2 \alpha_2}$$

Falls der Brechungsindex des Prismas nicht dem der umgebenden Luft gleicht, also $n \neq 1$, ist diese Aussage nur wahr für $\alpha_1 = \alpha_2 =: \alpha$. Das Snelliussche Gesetz liefert dann sofort auch $\beta_1 = \beta_2 =: \beta$. Damit verläuft der Strahlengang symmetrisch.

Aus den beiden geometrischen Beziehungen Gl. 1 und Gl. 3 folgt für diesen Fall:

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\gamma + \varepsilon}{2} \\ \beta &= \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

Damit können wir das Snelliussche Gesetz nun schreiben als:

$$n = \frac{\sin\left(\frac{\gamma+\varepsilon}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)} \quad (5)$$

Dies ist die *Fraunhofersche Formel*. Bei einer bekannten Wellenlänge λ und einem bekannten, brechenden Winkel ε kann man somit durch die Messung des Ablenkwinkels γ den Brechungsindex des Prismas für diese Wellenlänge bestimmen.

2.3.2 Dispersion und Winkeldispersion

Wie schon Eingangs erwähnt, versteht man unter der *Dispersion* $dn/d\lambda$ eines Mediums die Änderung des Brechungsindex mit der Wellenlänge. Man unterscheidet zwischen *normaler* und *anormaler Dispersion*. Normale Dispersion liegt vor, falls $dn/d\lambda > 0$. Entsprechend handelt es sich in dem Fall $dn/d\lambda < 0$ um anormale Dispersion.

Im Fall eines Spektrographen ist nun zudem die *Winkeldispersion* $D := d\gamma/d\lambda$ von Bedeutung. Wollen wir diese über die zuvor eingeführte Dispersion ausdrücken, so liefert die Kettenregel:

$$D := \frac{d\gamma}{d\lambda} = \frac{d\gamma}{dn} \frac{dn}{d\lambda} = \left(\frac{dn}{d\gamma}\right)^{-1} \frac{dn}{d\lambda}$$

Wir erhalten nun die Ableitung $dn/d\gamma$ aus der Fraunhoferschen Formel (Gl. 5). Damit ergibt sich schließlich für die Winkeldispersion eines Prismas:

$$D = \frac{2 \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\gamma+\varepsilon}{2}\right)} \frac{dn}{d\lambda} \quad (6)$$

2.3.3 Auflösungsvermögen

Das *Auflösungsvermögen* A eines Spektrographen ist allgemein definiert durch:

$$A := \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \quad (7)$$

Dabei ist $\Delta\lambda$ die minimale Differenz zweier Wellenlängen λ und $\lambda + \Delta\lambda$, die noch getrennt aufgelöst werden können.

Es ist nun nötig ein Kriterium zu definieren, welches angibt, ob zwei Wellenlängen noch aufgelöst werden. Man verwendet hierzu die *Rayleighsche Grenzlage*. Diese besagt, dass die Auflösbarkeit gegeben ist, falls das Hauptmaximum des Beugungsbildes der zweiten Wellenlänge $\lambda + \Delta\lambda$ nicht dichter als das erste Minimum der ersten Wellenlänge λ am Hauptmaximum der ersten Wellenlänge λ liegt.

Nun erscheint es zunächst ungewohnt bei dem auf Brechung basierenden Prismenspektrographen Beugungserscheinungen zu betrachten. Da Lichtstrahlen die an unterschiedlichen Stellen in das Prisma eintreten jedoch einen verschieden langen Weg im Prisma zurücklegen, kommt es zu Phasenverschiebungen und somit zu Beugung.

Die Winkeldifferenz $\Delta\gamma$ zwischen dem Hauptmaximum der Wellenlänge λ und dem entsprechenden ersten Minimum entspricht nun:

$$\Delta\gamma = \frac{\lambda}{d}$$

Dabei ist d die Breite des Lichtbündels, das auf das Prisma trifft. Mit Hilfe der Winkeldispersion D können wir nun die Wellenlänge $\lambda + \Delta\lambda$ bestimmen, die gerade bei einem um $\Delta\gamma$ verschiedenen Winkel ihr Hauptmaximum hat und somit gerade die Rayleighsche Grenzlage erfüllt. Eine lineare Näherung ergibt:

$$\Delta\lambda = \frac{\Delta\gamma}{D}$$

Zusammen mit der Gleichung zuvor ergibt dies:

$$A = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = dD \quad (8)$$

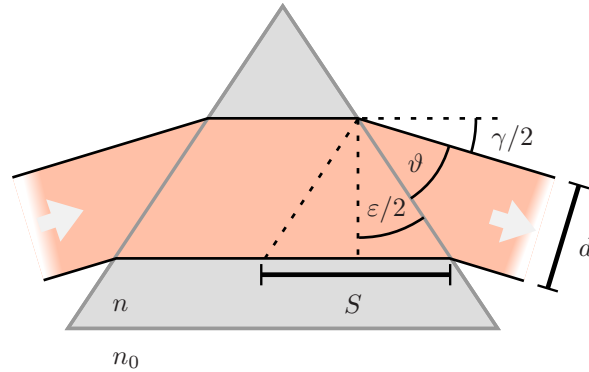


Abbildung 2: Effektive Basislänge des Prismas

Wir gehen nun weiter auf die in Abb. 2 gegebene Geometrie des Prismas ein. Zunächst erkennen wir eine Beziehung zwischen den bereits bekannten Winkeln ε und γ und dem Winkel ϑ zwischen Austrittsfläche und austretendem Lichtbündel:

$$\pi/2 = \frac{\varepsilon + \gamma}{2} + \vartheta$$

Dies bedeutet wiederum:

$$\vartheta = \pi/2 - \frac{\varepsilon + \gamma}{2}$$

Wir können diesen Winkel auch über die Strecke l , auf der das Lichtbündel aus dem Prisma austritt, schreiben:

$$\frac{d}{l} = \sin \vartheta = \cos(\pi/2 - \vartheta)$$

Nun führen wir eine weitere Größe, die *effektive Basislänge* S , ein. Dies ist die Strecke, die der in Abb. 2 untere Strahl des Lichtbündels mehr im Prisma zurücklegt als der obere Strahl. Wir erhalten hier die Beziehung:

$$\sin(\varepsilon/2) = \frac{S/2}{l}$$

Zusammen mit der Gleichung zuvor können wir nun die effektive Basislänge S ohne l ausdrücken.

$$S = \frac{2d \sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\varepsilon + \gamma}{2}\right)}$$

Ein Vergleich mit der Winkeldispersion in Gl. 6 liefert, dass wir das in Gl. 8 erhaltene Auflösungsvermögen eines Prismas auch schreiben können als:

$$A = S \frac{dn}{d\lambda}$$

2.4 Gitterspektrographen

Ein Gitterspektrograph ist analog zum Prismenspektrographen aufgebaut, jedoch befindet sich nun an der Stelle des Prismas ein Gitter. Dieses Gitter habe N Öffnungen und jeweils zwei dieser Öffnungen haben den Abstand d voneinander.

2.4.1 Winkeldispersion

Da die Spektrale Zerlegung des einfallenden Lichts nun auf der Beugung an diesem Gitter beruht, benötigen wir die Winkel γ_m unter denen die von den Gitteröffnungen ausgehenden Elementarwellen konstruktiv interferieren.

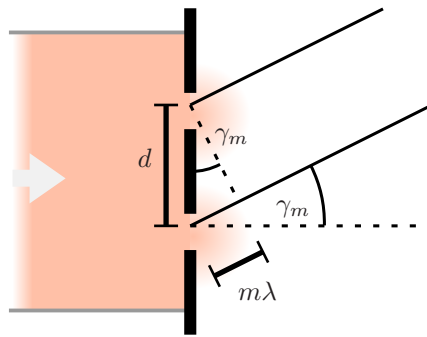


Abbildung 3: Hauptmaxima am Gitter

Um diese Hauptmaxima zu bestimmen, reicht es aus zwei benachbarte Öffnungen zu betrachten (siehe Abb. 3). Weisen die von diesen Spalten ausgehenden Elementarwellen in der betrachteten Richtung einen Gangunterschied von $m\lambda$, wobei $m \in \mathbb{Z}$, auf, so interferieren sie konstruktiv. Ist diese Bedingung erfüllt, so ist gleichzeitig der Gangunterschied zwischen zwei beliebigen Öffnungen des Gitters ein Vielfaches von λ . Damit liegt in dieser Richtung das Hauptmaximum m -ter Ordnung vor. Aus der Abbildung können wir jetzt die Winkel entnehmen, für die Maxima auftreten:

$$d \sin \gamma_m = m\lambda$$

Wir bemerken nun noch einmal, dass die Richtung der Maxima natürlich von der Wellenlänge abhängt und wir diese Anordnung somit als Spektrographen verwenden können. Außerdem fällt auf, dass es, insbesondere bei höheren Ordnungen, zu Überlappungen der Spektren verschiedener Ordnungen kommen kann.

Durch Differentiation der obigen Gleichung nach λ erhalten wir die, bereits für den Prismenspektrographen definierte, Winkeldispersion D des Gitterspektrographen:

$$D = \frac{d\gamma_m}{d\lambda} = \frac{m}{d \cos \gamma_m} \quad (9)$$

Für kleine Winkel ist dies mit $\cos \gamma_m \approx 1$:

$$D = \frac{m}{d}$$

2.4.2 Auflösungsvermögen

Auch das Auflösungsvermögen A eines Gitterspektrographen definieren wir analog zu dem des Prismas. Als Kriterium für die Unterscheidbarkeit zweier Wellenlängen verwenden wir auch hier die Rayleighsche Grenzlage.

Wir benötigen somit die Winkeldifferenz $\Delta\gamma$, um die sich das nächste Minimum von dem Hauptmaximum m -ter Ordnung unterscheidet. Liegt also beim Winkel γ_m ein Hauptmaximum vor, so kommt es bei einem zusätzlichen Gangunterschied von λ/N zwischen benachbarten Öffnungen zu einem Minimum. Um dies zu begründen, betrachten wir zunächst den zusätzlichen Gangunterschied einer, von einer äußeren Gitteröffnung ausgehenden, Elementarwelle zu einer, die genau von der Gittermitte ausgeht. Dieser ist nun $\lambda/N \cdot N/2 = \lambda/2$. Damit löschen sich diese beiden Elementarwellen aus. Man findet nun zu jeder Gitteröffnung genau eine weitere, die einen Gangunterschied von $\lambda/2$ aufweist. Somit liegt ein Minimum vor.

Wir schreiben nun für die Richtung dieses Minimums $\gamma_{m'}$. Zur Berechnung der Winkeldifferenz $\Delta\gamma = \gamma_m - \gamma_{m'}$ verwenden wir, wie schon beim Maximum, die geometrischen Beziehungen zwischen zwei Öffnungen und schreiben:

$$d \sin \gamma_m - d \sin \gamma_{m'} = m\lambda - (m\lambda - \lambda/N) = \lambda/N$$

Mit Hilfe der Additionstheoreme wird dies zu:

$$\frac{\lambda}{dN} = 2 \cos \left(\frac{\gamma_m + \gamma_{m'}}{2} \right) \sin \left(\frac{\gamma_m - \gamma_{m'}}{2} \right)$$

Da $\Delta\gamma$ klein ist, nehmen wir nun an, dass $\gamma_m + \gamma_{m'} \approx 2\gamma_m$ und erhalten so:

$$\frac{\lambda}{dN} = 2 \cos \gamma_m \sin(\Delta\gamma/2)$$

Da $\Delta\gamma$ klein ist, können wir nun schreiben:

$$\Delta\gamma = \frac{\lambda}{dN \cos \gamma_m}$$

Zusammen mit Gl. 9 erhalten wir nun das Auflösungsvermögen A eines Gitters:

$$A = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN$$

3 Durchführung

3.1 Prismenspektrometer

Wir erzeugen, wie in Kap. 2.2 beschrieben, mit einer Quecksilberdampfampe, einer Kondensorlinse, einem Spiegel sowie einem Spalt paralleles Licht und bilden es mittels einer weiteren Linse auf einem Okular ab. Mittig ist ein Drehteller angebracht, auf dem später ein Prisma montiert wird. Das Okular ist auf einem Schwenkarm befestigt.

Nun wird für 3 Prismen (Kronglas, leichtes Flintglas und schweres Flintglas) die folgende Messreihe durchgeführt:

1. Fadenkreuz des Okulars auf den durchgehenden Strahl stellen und Winkel notieren.

2. Prisma in den Strahl bringen, minimalen Ablenkungswinkel durch Drehen des Tellers einstellen und den Schwenkarm auf eine der gelben Linien justieren. Der Winkel wird notiert.
3. Abstand der grünen von der gelben Linie bestimmen.
4. Verengen des Bündelquerschnitts mit einem zweiten Spalt, bis die gelben Linien gerade nicht getrennt sind.
5. Bei vorgesetztem Rotfilter ohne Prisma sein Bild mit Hilfe des Messokulars ausmessen.

3.2 Gitterspektrometer

Der Grundaufbau ist der selbe wie zuvor, das parallele Licht trifft aber diesmal senkrecht auf ein Glasgitter der Breite 15mm. Hierbei führen wir folgende Messungen für die Ordnungen 1, 2, 3, 4 und 8 durch:

1. Ablenkungswinkel der gelben, grünen und violetten Linien bestimmen.
2. Bestimmung der Winkeldifferenz zwischen den beiden gelben sowie zwischen der grünen und einer der gelben Linien.
3. Bestimmung der kleinsten eingeschobenen Spaltblende, bei der die beiden gelben Linien nicht mehr auflösbar sind.

4 Auswertung

4.1 Prismenspektrometer

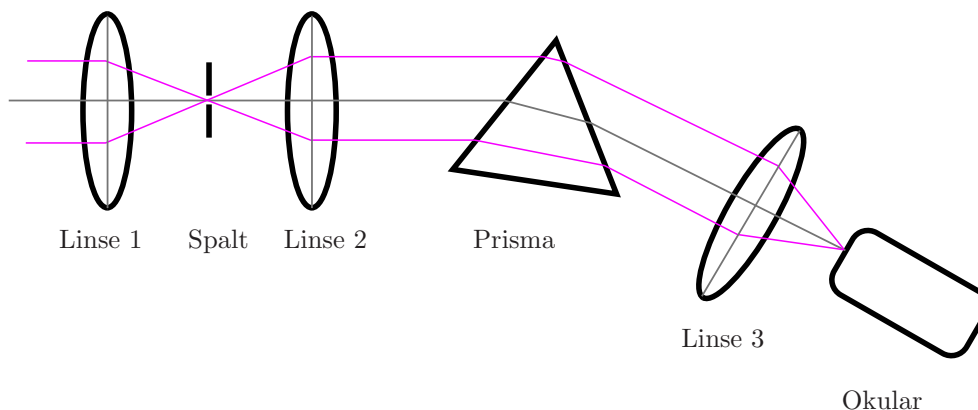


Abbildung 4: Strahlengang mit Prisma

In den Abb. 4 und 5 sind die Strahlengänge mit Prisma und für die Vermessung der Linien mit Rotfilter eingezeichnet.

In Tab. 1 sind einige Werte aus dem Praktikumsskript gegeben, die wir im Folgenden benutzen wollen.

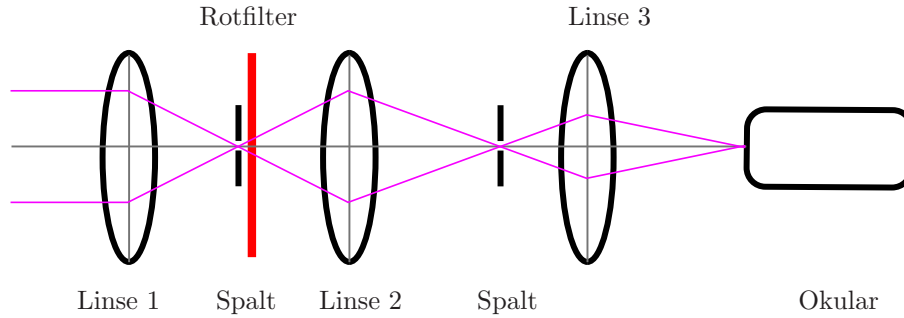


Abbildung 5: Strahlengang mit Rotfilter

λ_i	Wellenlänge [nm]	Farbe
1	573,07	gelb
2	576,96	gelb
3	546,07	grün
5	491,60	blaugrün
4	435,84	blau
5	407,78	violett

Tabelle 1: Einige der bekannten Wellenlänge des Hg-Spektrums

Nun können wir die gemessene Differenz Δx zwischen den Linien mittels der Formel (siehe Abb. 6)

$$\frac{\Delta x}{e} = \tan \Delta \delta$$

in die Winkeldifferenz umrechnen. e bezeichnet hierbei den Abstand der 3. Linse vom Okular.

Nun ist die Differenz der Wellenlängen zwischen gelb und grün recht klein, wir können also in guter Näherung annehmen, dass

$$\begin{aligned} \frac{dn}{d\lambda} &= \text{const.} \\ \Rightarrow \frac{\Delta \delta_{12}}{\Delta \lambda_{12}} &= \frac{\Delta \delta_{13}}{\Delta \lambda_{13}} = \text{const.} \\ \Rightarrow \Delta \delta_{12} &= \frac{\Delta \lambda_{12}}{\Delta \lambda_{13}} \cdot \Delta \delta_{13} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir folgende Werte:

$$\begin{aligned} \Delta \delta_{12_{Krongl.}} &= 0,03(12)^\circ \\ \Delta \delta_{12_{Krongl.}} &= 1,14(12)^\circ \text{ (auf Basis der blauen Linie)} \\ \Delta \delta_{12_{Flintgl.}} &= 0,10(12)^\circ \\ \Delta \delta_{12_{schw.Flntgl.}} &= 0,02(12)^\circ \end{aligned}$$

Der Wert auf Basis der blauen Linie weicht sehr stark ab. Dies liegt an der Annahme der konstanten Dispersion. Er wird nicht weiter verwendet.

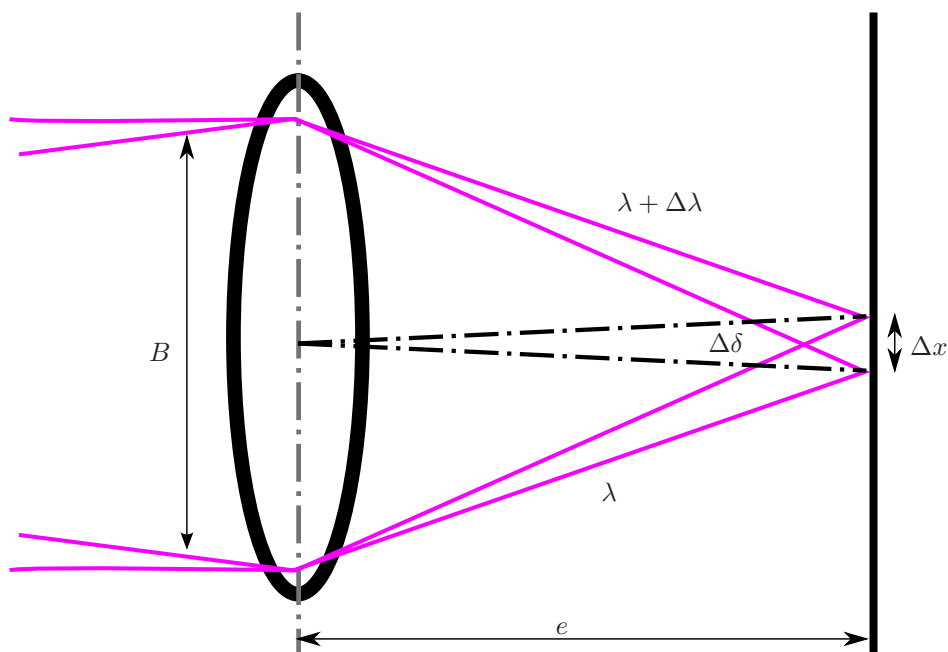


Abbildung 6: Schema zur Berechnung der Winkeldifferenz

Außerdem können wir mit der oben gemachten Annahme die Dispersion $D = \frac{\Delta\delta_{13}}{\Delta\lambda_{13}}$ berechnen. Die Werte sind in Tab. 2 zusammen mit den Herstellerangaben¹ dargestellt.

	D [10^6 °/m]	Herst. [10^6 °/m]
Kronglas (N-BK7)	13(2)	4.33
leichtes Flintglas (N-F2)	47(2)	10.3
schweres Flintglas (N-SF10)	10(2)	21.8

Tabelle 2: Die gemessenen Dispersionen

Mit der Formel

$$\frac{dn}{d\lambda} = \frac{D \cos((\delta_1 + \varepsilon)/2)}{2 \sin(\varepsilon/2)}$$

erhalten wir einen Zusammenhang zwischen der Dispersion und der Winkeldispersion. Hier ist $\varepsilon = 60^\circ$ der Innenwinkel des Prismas und δ_1 die Ablenkung der ersten gelben Linie. Die Ergebnisse sind:

$$\begin{aligned} \left. \frac{dn}{d\lambda} \right|_{Krongl} &= 7.1(9) \cdot 10^6 \text{ mm}^{-1} \\ \left. \frac{dn}{d\lambda} \right|_{Flintgl} &= 2.3(4) \cdot 10^7 \text{ mm}^{-1} \end{aligned}$$

¹Leider stellt dieser auf <http://www.linios.com/> zum momentanen Zeitpunkt (13.02.2007) keine Daten mehr zur Verfügung. Auch auf der Praktikumsseite war – entgegen der Aussage im Skript – ebenfalls nichts zu finden und für den von Linos angebotenen Glassmanager fehlte uns das Geld. Daher verweisen wir an dieser Stelle auf das Vorgängeprotokoll von Daniel Scholz und Hauke Rohmeyer von <http://www.mehr-davon.de/content/protokolle/index.html>; 13.02.2007

$$\left. \frac{dn}{d\lambda} \right|_{s \text{ Flintgl}} = 5(1) \cdot 10^6 \text{ mm}^{-1}$$

4.1.1 Spaltbreite

Nun wollen wir die Spaltbreite d bestimmen. Hierzu müssen wir die gemessene Breite durch die Vergrößerung teilen. Diese erhalten wir durch

$$v = \frac{\text{Bildweite}}{\text{Gegenstandsweite}} = \frac{f_2}{f_3 - f_{Ok}} = 1.73(2) = \frac{\text{Bildgröße}}{\text{Gegenstandsgröße}}.$$

Mit

$$\begin{aligned} d &= d_{\text{mess}}/v \\ d_{s \text{ Flintgl}} &= 3,7(2) \cdot 10^{-4} \text{ m} \end{aligned}$$

bekommen wir die gewünschten Werte. Die anderen beiden Gläser fehlen, da wir dort die beiden gelben Linien nie auflösen konnten. Es war nur eine einzige, breite zu beobachten.

4.1.2 Auflösungsvermögen des Spektrometers

Schließlich können wir das Auflösungsvermögen berechnen. Hierzu betrachten wir die, in der Theorie hergeleitete Formel

$$\begin{aligned} A &= \frac{2d}{\cos((\delta_1 + \varepsilon)/2)} \sin(\varepsilon/2) \frac{dn}{d\lambda} \\ A_{\text{theoret.}} &= 3800(800). \end{aligned}$$

Der Wert ergibt sich nur aus dem Wert für das schwere Flintglas.

In der Durchführung haben wir den Spalt so eng gestellt, dass die gelben Linien gerade nicht mehr aufgelöst wurden. Damit haben wir also ein minimales Auflösungsvermögen von

$$A_{\text{min}} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} = 274.5$$

Über die hergeleitete Formel

$$A = S \frac{dn}{d\lambda}$$

und die Annahme, dass die gesamte Länge des Prismas, also $S = 4.9 \text{ cm}$ (bzw. 5.9 beim schweren Flintglas), beleuchtet wird, erhalten wir mit den eben berechneten Dispersionswerten:

$$\begin{aligned} A_{\text{maxKrongl}} &= 35(5) \cdot 10^4 \\ A_{\text{maxl Flintgl}} &= 11(3) \cdot 10^5 \\ A_{\text{maxs Flintgl}} &= 31(6) \cdot 10^4 \end{aligned}$$

Damit können wir nun ebenfalls die kleinste noch auflösbare Wellenlängendifferenz bei gelben Licht bestimmen:

$$\begin{aligned} \Delta\lambda_{\text{min}} &= \frac{\lambda_1}{A_{\text{max}}} \\ \Delta\lambda_{\text{minKrongl}} &= 0.00165 \text{ nm} \\ \Delta\lambda_{\text{minl Flintgl}} &= 0.000520 \text{ nm} \\ \Delta\lambda_{\text{min_s Flintgl}} &= 0.00187 \text{ nm} \end{aligned}$$

Diese Werte sind natürlich völliger Irrsinn und haben keinerlei Wert. Die große Abweichung von realen Werten im Bereich von $0.1nm$ ist dadurch zu erklären, dass bereits die Dispersion und Winkeldispersion um eine Zehnerpotenz abwich und mehrfach multiplikativ einging. Woher diese Abweichung kommt, ist uns nicht klar.

4.2 Gitterspektrometer

4.2.1 Ablenkwinkel

Analog zum Prismenspektrometer berechnen wir die Ablenkwinkel. Die Ergebnisse sind in Tab. 3 angegeben.

Ordnung	$\delta_{12} = \Delta\alpha[^\circ]$	$\delta_{13} = \Delta\beta[^\circ]$	$\delta_{14}[^\circ]$
1	0.0153	0.1842	0.7605
2	0.0256	0.3581	1.5071
3	0.0324	0.5167	2.3383
4	0.0784	0.7332	3.1073
8	0.1006	1.5633	4.1162

Tabelle 3: Die Ablenkwinkel beim Gitterspektrometer

4.2.2 Gitterkonstante

Mit Hilfe der Beziehung

$$\sin(\delta_k) = k\lambda/d \quad (10)$$

können wir die Gitterkonstante d bestimmen. Hierzu haben wir $k\lambda_1$ gegen $\sin(\delta_k)$ in Abb. 7 linear gefittet. Das Ergebnis ist

$$d = 1.1(2) \cdot 10^{-5}m.$$

Der Fehler resultiert aus dem Fitverfahren von `gnuplot`.

4.2.3 Die Wellenlängendifferenz

Analog zum Prisma verwenden wir erneut die Beziehung bei konstanter Winkeldispersion bei kleinen Wellenlängen:

$$\Rightarrow \Delta\lambda_{12} = \frac{\Delta\lambda_{13}}{\Delta\delta_{13}} \cdot \Delta\delta_{12} = \Delta\lambda_{13} \cdot \frac{\Delta\alpha}{\Delta\beta}$$

Damit erhalten wir nun folgenden Mittelwert:

$$\Delta\lambda_{12} = 2.6(3)nm$$

Die Werte der Einzelmessungen finden sich in Tab. 4.

4.2.4 Das Auflösungsvermögen

Mit Hilfe der Gleichung $A := \lambda/\Delta\lambda$ können wir das tatsächliche Auflösungsvermögen bei der gelben Doppellinie zu $A = 274,4$ bestimmen. Das theoretische Auflösungsvermögen erhalten wir dagegen mittels

$$A_{theo} = kN = k \frac{d_{min}}{d}.$$

Für die erste und achte Ordnung konnten wir die kleinste Spaltbreite, bei der gerade nicht mehr aufgelöst wird nicht bestimmen, da im ersten Fall die Linien nie zu trennen waren und im zweiten die Intensität zu schwach war. Die anderen 3 sind:

$$\begin{aligned} A_{theo,2} &= 272 \\ A_{theo,3} &= 204 \\ A_{theo,4} &= 181 \end{aligned}$$

Die Werte weichen um bis zu 33% ab, wobei der am besten zu erkennende mit 272 auch am nächsten am theoretischen Wert liegt. Für das maximale Auflösungsvermögen setzen wir in die Formel $d_{min} = 1,5cm$ ein, die Breite des Gitters. Damit ergibt sich:

$$A_{max} = A_{max,1} = 1363$$

4.2.5 Wellenlänge der blauen Linie

Wir berechnen nun mittels der Gl. 10 und den Messwerten die Wellenlänge der blauen Linie². Der Winkel im Sinus ergibt sich durch Subtraktion des Winkels der gelben Linie und dem errechneten δ_{14} . Erneut fitten wir linear. Das Ergebnis ist in Abb. 8 zu finden. Als Anstieg erhalten wir:

$$\lambda_{blau} = 471(91)nm$$

Damit liegen wir ca. 8% entfernt vom Literaturwert.

5 Einordnung der Ergebnisse

Die Ergebnisse des Prismenspektrometers können nicht überzeugen. Bereits die Dispersion weicht um gut eine Zehnerpotenz von den Literaturwerten ab. Dies zieht sich durch alle Rechnungen des Prismenspektrometers, bis schließlich die Berechnung der minimal aufzulösenden Wellenlänge ein völlig unbrauchbares Resultat liefert.

Die Werte des Gitterspektrometers sind dagegen recht nahe an den bekannten Zahlen. Dies wurde bereits im Versuch deutlich, bei dem der 2. Teil wesentlich einfacher von der Hand ging.

Die Einstellung des Prismas erwies sich als äußerst kompliziert und trotz einiger Versuche konnten die zu erwartenden 2 gelben Linien nicht ausgemacht werden. Dieser Versuch ist eindeutig zu lang. Eine Messung mit einem Prisma würde ausreichen und auch die Beschränkung auf einige der Auswertungspunkte wäre genug. Weiterhin könnte die Praktikumsanleitung ein wenig detaillierter auf die zu messenden Größen eingehen, da man sonst ohne Vorgängerprotokolle und eine bereits vorher geschriebene Auswertung mit Sicherheit 60% der Messungen schlichtweg nicht durchführt.

²Wir berechnen nicht die violette Linie, da diese nicht bei allen Ordnungen sauber zu erkennen war.

A Tabellen und Grafiken

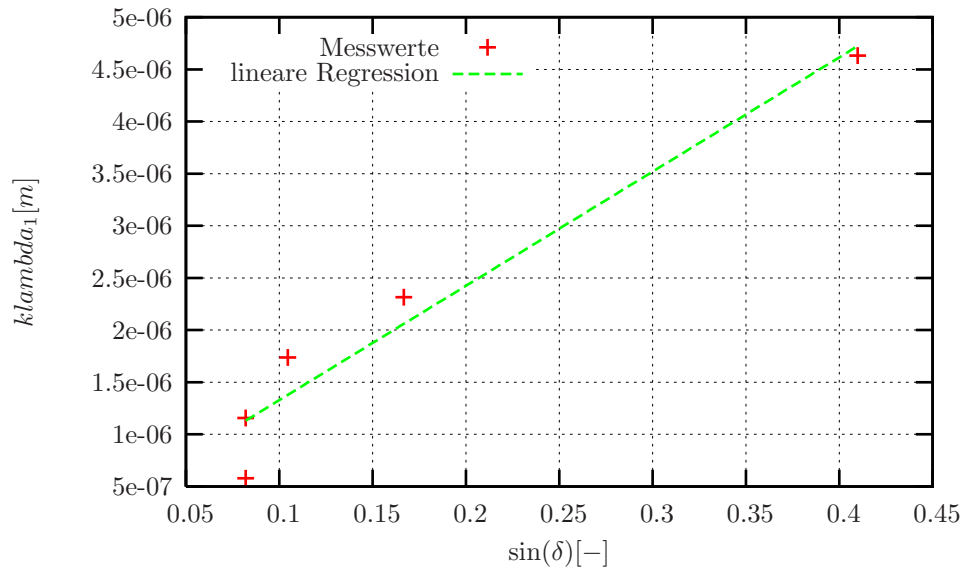


Abbildung 7: Fit zur Bestimmung der Gitterkonstanten

Ordnung	$\Delta\lambda_{12}$
1	$2,750 \cdot 10^{-09}$
2	$2,357 \cdot 10^{-09}$
3	$2,069 \cdot 10^{-09}$
4	$3,530 \cdot 10^{-09}$
8	$2,124 \cdot 10^{-09}$

Tabelle 4: Die einzelnen Werte der Bestimmung der Wellenlängendifferenz

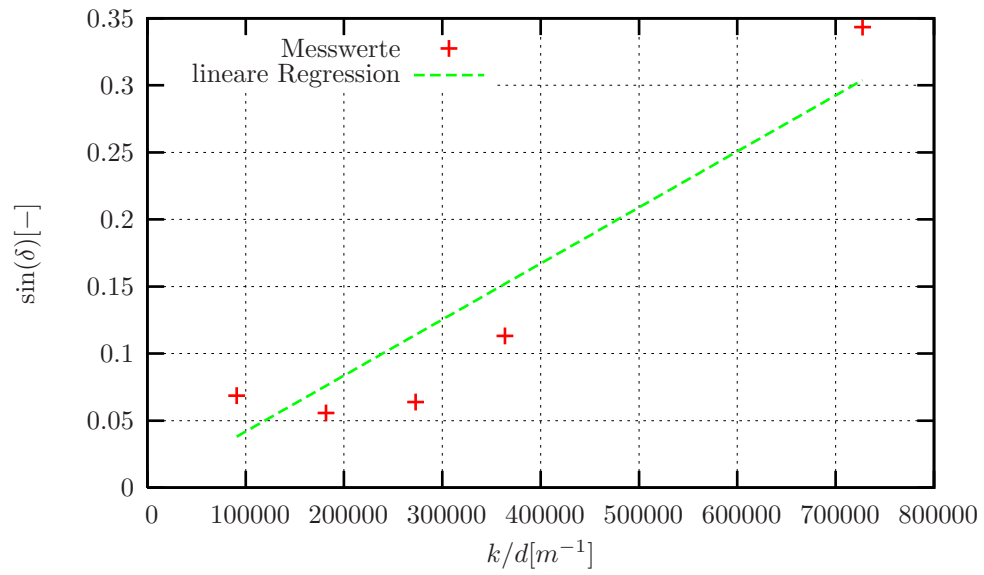


Abbildung 8: Fit zur Bestimmung der Wellenlänge der blauen Linie