

Physikalisches A-Praktikum

Versuch 25

Fresnelsche Formel und Polarisation

Praktikanten: Nils Kanning
Steffen Klemer
Durchgeföhrt am: 16.02.2007
Gruppe: 6
Assistent: Till Benter

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
2	Theorie	4
2.1	Licht als elektromagnetische Welle	4
2.1.1	Polarisation	5
2.2	Ausbreitung von Licht in Materie	6
2.2.1	Reflexion	6
2.2.2	Brechung	7
2.3	Fresnelsche Formeln	8
2.3.1	Brewsterscher Winkel	12
2.3.2	Innere Totalreflexion	13
2.4	Doppelbrechung	13
2.4.1	Doppelbrechende Polarisatoren	14
3	Durchführung	15
3.1	Das Polarimeter	15
3.2	Die Messung	16
4	Auswertung	16
4.1	Drehung der Schwingungsebene	16
4.2	Brewsterwinkel und Brechungsindex	17
4.3	Brewsterwinkel aus der direkten Messung	18
5	Einordnung der Ergebnisse	18
A	Tabellen und Grafiken	19

1 Einleitung

Im 19. Jahrhundert stellte JAMES CLERK MAXWELL fest, dass es sich bei Licht um elektromagnetische Wellen handelt und beschrieb dieses Phänomen durch einen Satz an Differentialgleichungen – den *Maxwell-Gleichungen*. Die immense Bedeutung, die dieser Entdeckung zugemessen werden muss, wird in einem Zitat von RICHARD P. FEYNMAN deutlich:

From a long view of the history of mankind — seen from, say, ten thousand years from now, there can be little doubt that the most significant event of the 19th century will be judged as Maxwell's discovery of the laws of electrodynamics. The American Civil War will pale into provincial insignificance in comparison with this important scientific event of the same decade.¹

Wir werden uns in diesem Versuch gerade auf diesen elektromagnetischen Charakter von Licht konzentrieren. Dabei werden wir mit den *Fresnelschen Formeln* ein Hilfsmittel zur Beschreibung der elektrischen Eigenschaften von Licht an einer Grenzfläche kennen lernen und so die Polarisation von Licht untersuchen.

2 Theorie

2.1 Licht als elektromagnetische Welle

Wir wollen uns hier zunächst auf Licht im Vakuum konzentrieren und die Gestalt dieser Wellen untersuchen. Im Vakuum lauten die vier, die Lichtausbreitung beschreibenden, Maxwell-Gleichungen:

$$\nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \quad (1)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \vec{E} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (4)$$

Anschaulich können wir uns zunächst eine Lichtwelle als periodische Störung des elektrischen Feldes \vec{E} vorstellen. Somit ändert sich dieses Feld zeitlich und induziert nach Gl. 2 ein magnetisches Feld. Da wir annehmen, dass die Störung des elektrischen Feldes periodisch ist, kann $\partial_t \vec{E}$ nicht konstant sein. Dies hat wiederum zur Folge, dass auch das induzierte Magnetfeld B nicht konstant ist. Folglich induziert die Magnetfeldänderung nach Gl. 1 wieder ein elektrisches Feld. Dieser Vorgang setzt sich fort und die anfängliche Störung breitet sich im Raum als Welle aus.

Wir werden nun die Gestalt dieser Welle etwas eingehender untersuchen. Zunächst kann man die obigen Gleichungen in eine Gestalt bringen die den Wellencharakter des Lichts deutlich macht:

$$\nabla^2 \vec{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t^2 \vec{E}$$

$$\nabla^2 \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t^2 \vec{B}$$

¹Richard P. Feynman: Lectures on Physics Vol. II, 1977, 1-11

Die Lösungen dieser Wellengleichungen haben alle die gleiche Ausbreitungsgeschwindigkeit:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

Dies ist die *Lichtgeschwindigkeit im Vakuum*.

Wir werden nun eine ebene Welle mit Ausbreitungsrichtung \vec{k} längs der x -Achse des gewählten Koordinatensystems diskutieren. Diese hat die Gestalt:

$$\vec{E} = \vec{E}(x, t)$$

Mit Hilfe von Gl. 3 erhalten wir:

$$\partial_x E_x = 0$$

Wir nehmen nun zusätzlich an, dass sich das Magnetfeld zu einem festen Zeitpunkt nur in x -Richtung ändert. Aus Gl. 2 folgt dann sofort $\partial_t E_x = 0$. Damit kann das elektrische Feld nur eine zeitlich und räumlich konstante Komponente in Ausbreitungsrichtung haben. Diese beeinflusst jedoch nicht den Charakter der Welle. Wir wählen daher $E_x = 0$ und stellen somit fest, dass das elektrische Feld einer Lichtwelle keine Komponente in Ausbreitungsrichtung hat.

Wir werden nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass das elektrische Feld zu jeder Zeit nur eine Komponente in y -Richtung hat. Man spricht in diesem Fall von *linear polarisiertem Licht* – auf das Phänomen der Polarisation werden wir in Kürze zu sprechen kommen. Es gilt:

$$\vec{E} = \hat{y} E_y(x, t)$$

Wir können nun mit Gl. 1 auf das magnetische Feld schließen:

$$\partial_x E_y = \partial_t B_z$$

Aus Gl. 1 folgt ebenso die zeitliche Invarianz von B_x und B_y . Diese konstanten Magnetfeldkomponenten können von weiteren magnetischen Feldern im Raum stammen. Sie verändern jedoch nicht die Gestalt der diskutierten Welle. Wir wählen daher $B_x = B_y = 0$. Das magnetische Feld hat damit nur eine Komponente in z -Richtung und steht senkrecht auf dem elektrischen Feld \vec{E} und dem Ausbreitungsvektor \vec{k} .

Damit handelt es sich bei der diskutierten ebenen Welle um eine *Transversalwelle*. Diese Eigenschaft weisen alle Lichtwellen auf.

2.1.1 Polarisation

Die *Polarisation* gibt das Verhalten des elektrischen Feldvektors einer Lichtwelle an. Wir haben uns bis hierhin auf Licht mit einem stets in eine Richtung zeigenden elektrischen Feldvektor konzentriert. Allgemein kann dieser Vektor sich jedoch in der zur Ausbreitungsrichtung orthogonalen Ebene bewegen. Man unterscheidet drei Formen der Polarisation:

lineare Polarisation Dies ist der bisher diskutierte Fall. Wir betrachten zusätzlich die Addition von zwei linear polarisierten Wellen:

$$\begin{aligned} \vec{E}_x(z, t) &= \hat{x} E_{0x} \cos(kz - \omega t) \\ \vec{E}_y(z, t) &= \hat{y} E_{0y} \cos(kz - \omega t + \varepsilon) \end{aligned}$$

Offensichtlich ist die Summe wieder linear polarisiert falls $\varepsilon = 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Aber auch für $\varepsilon = \pi + 2n\pi$ ist dies der Fall. Allerdings ist nun die Schwingungsebene um einen konstanten Winkel gedreht.

zirkulare Polarisation Sind die Amplituden der beiden Wellen gleich $E_{0x} = E_{0y} = E_0$ und $\varepsilon = \pi/2 + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, so beschreibt der elektrische Feldvektor einen Kreis.

elliptische Polarisation Im allgemeinen Fall sind E_{0x} , E_{0y} und ε beliebig. Der Feldvektor durchläuft in diesem Fall eine Ellipse.

2.2 Ausbreitung von Licht in Materie

Bisher haben wir uns auf die Ausbreitung in Licht im Vakuum beschränkt. Wir wollen uns nun, zumindest anschaulich, auch ein Bild von der Lichtausbreitung in Materie verschaffen.

Wir betrachten eine ebene Welle, die sich in einem homogenen Medium ausbreitet. Die Atome werden durch die Lichtwelle – *die Primärwelle* – zu Schwingungen ange-regt. Dabei strahlen diese dann selber elektromagnetische Strahlung aus. Um jedes Atom breitet sich eine kugelförmige *Elementarwelle* aus. Betrachtet man diesen Vorgang genauer, stellt sich heraus, dass sich diese Elementarwellen in nahezu allen Richtungen gegenseitig auslöschen. Nur in der Ausbreitungsrichtung der Primärwelle findet konstruktive Interferenz statt. Die Summe der Elementarwellen nennen wir *Sekundärwelle*. Die Summe aus Primär- und Sekundärwelle heißt *Brechungswelle* und stellt die letztlich im Medium verbleibende Strahlung dar.

Wir wollen nun eine Aussage über die Ausbreitungsgeschwindigkeit dieser Brechungswelle treffen. Dazu betrachten wir die Anregung der Atome ganz klassisch als erzwungene Schwingung. Abhängig von der Frequenz der Primärwelle und der Eigenfrequenz der Atome stellt sich somit eine Phasenverschiebung zwischen Primär- und Sekundärwelle ein. Damit ist auch die Brechungswelle bezüglich der Primärwelle phasenverschoben. Erreicht diese Brechungswelle die nächste Atomebene, so kommt eine weitere Phasenverschiebung hinzu.

Dieser Prozess hat den Effekt, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit v der resultierenden Welle ungleich der Lichtgeschwindigkeit c erscheint.

Wir definieren aus diesen beiden Größen den *Brechungsindex* n des Materials:

$$n = \frac{c}{v}$$

Aus der obigen Betrachtung ergibt sich außerdem, dass dieser Brechungsindex allgemein von der Frequenz der Lichts abhängt – also $n = n(\omega)$. Dies soll uns im Folgenden jedoch nicht interessieren, da wir ausschließlich monochromatisches Licht diskutieren werden.

Im Zusammenhang des Brechungsindex spricht man auch von der *optischen Dichte* eines Mediums und definiert, dass ein Medium a *optisch dichter* als ein weiteres Medium b ist, falls $n_a > n_b$. Entsprechend verwendet man auch den Begriff *optisch dünner*.

2.2.1 Reflexion

Bisher haben wir die Lichtausbreitung in einem homogenen Medium betrachtet. Jetzt ist für uns ein Vorgang an der Grenzfläche zweier Medien von Interesse.

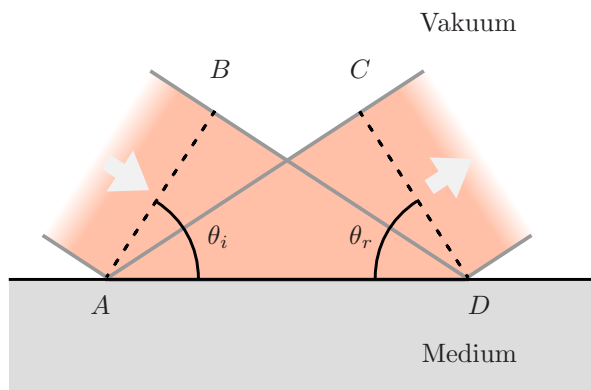


Abbildung 1: Reflexion an einer Grenzfläche

Betrachten wir den Übergang vom Vakuum in ein Medium, so fehlen im Vakuum die Interferenzpartner zur vollständigen Auslöschung der Sekundärwelle in der, der Ausbreitungsrichtung entgegengesetzten, Richtung. Somit breitet sich ein Teil der Welle in Rückwärtsrichtung aus. Dieses Phänomen nennen wir *Reflexion*.

Trifft die ebene Wellen in einem Winkel θ_i zur Flächennormalen auf die Grenzfläche, so können wir den Winkel θ_r der reflektierten Welle bestimmen.

Die einfallende Wellenfront (siehe Abb. 1) regt die Atome zu Schwingungen an. Diese senden daraufhin Elementarwellen aus, welche in genau einer Richtung konstruktiv interferieren. In der Abbildung ist die Strecke \overline{AB} parallel zur einfallenden Wellenfront. Die Strecke \overline{CD} ist parallel zur reflektierten Wellenfront. Dies bedeutet, dass die zur Zeit $t - \Delta t$ vom Punkt A ausgesandte Elementarwelle, deren Wellenfront gerade bei C ist, mit der zum Zeitpunkt t bei D ausgesandten Welle, die sich noch nicht von D ausgebreitet hat, in Phase ist. Da sich beide Wellen im gleichen Medium ausbreiten ist ihre Ausbreitungsgeschwindigkeit v identisch. Somit gilt die geforderte Phasengleichheit, wenn die in der Zeit Δt von der einfallenden Welle zurückgelegte Strecke \overline{BD} gleich der, in der selben Zeit von der reflektieren Welle zurückgelegten, Strecke \overline{AC} ist. Damit können wir die beiden ähnlichen Dreiecke ABD und ACD betrachten. Die Hypotenuse \overline{AD} stimmt überein. Folglich gilt:

$$\frac{\sin \theta_i}{\overline{BD}} = \frac{\sin \theta_r}{\overline{AC}}$$

Da $\overline{AC} = \overline{BD}$ erhalten wir das *Reflexionsgesetz*:

$$\theta_i = \theta_r$$

Der Einfallswinkel der ankommenden Welle ist gleich dem Ausfallswinkel der reflektierten Welle.

2.2.2 Brechung

Nun konzentrieren wir uns beim Übergang an einer Grenzschicht auf den Anteil, der transmittiert wird, sich also im neuen Medium ausbreitet.

Wir bezeichnen den Brechungsindex des Mediums der einfallenden Welle mit n_i und die Geschwindigkeit jener Welle mit v_i . Entsprechend wählen wir n_t und v_t für die entsprechenden Größen im anderen Medium (siehe auch Abb. 2).

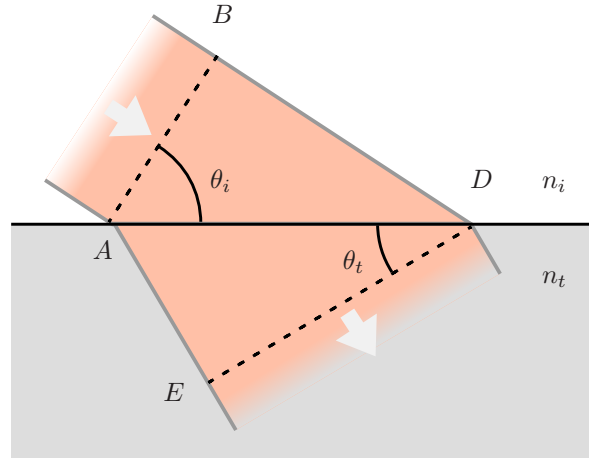


Abbildung 2: Brechung an einer Grenzfläche

Analog zur Diskussion der Reflexion ist die Strecke \overline{AB} parallel zu einer einfallenden Wellenfront. Die Strecke \overline{DE} ist entsprechend parallel zu einer Wellenfront der transmittierten Welle. Damit dies der Fall ist, muss die Strecke \overline{BD} von der einfallenden Welle in der Zeit Δt zurückgelegt werden. In der gleichen Zeit muss die transmittierte Welle die Strecke \overline{AE} zurücklegen. Dies bedeutet:

$$\begin{aligned}\overline{BD} &= \Delta t v_i \\ \overline{AE} &= \Delta t v_t\end{aligned}$$

Die Hypotenuse \overline{AD} der Dreiecke ABD und ADE stimmt überein. Daher schreiben wir:

$$\frac{\sin \theta_i}{\overline{BD}} = \frac{\sin \theta_t}{\overline{AE}}$$

Mit den obigen Beziehungen über die in der Zeit Δt zurückgelegten Strecken bedeutet dies:

$$\frac{\sin \theta_i}{v_i} = \frac{\sin \theta_t}{v_t}$$

Schreiben wir dies unter Verwendung der Brechungsindizes der Medien, so erhalten wir das *Snelliussche Brechungsgesetz*:

$$\frac{n_t}{n_i} = \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} \quad (5)$$

2.3 Fresnelsche Formeln²

Bis hierhin haben wir uns lediglich mit den Winkeln befasst, unter denen eine Ebene Welle reflektiert und gebrochen wird. Nun wollen wir auch darauf eingehen, wie die elektrischen Feldvektoren der reflektierten und der gebrochenen Welle aussehen.

Wir beschreiben die Wellen durch Kosinus-Funktionen. Dabei verwenden wir die bereits bekannten Indizes i , r und t für die einfallende, reflektierte und transmittierte

²vgl. Eugen Hecht: Optik. 2001, S. 372-379.

Welle:

$$\begin{aligned}\vec{E}_i &= \vec{E}_{0i} \cos(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t) \\ \vec{E}_r &= \vec{E}_{0r} \cos(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t + \varepsilon_r) \\ \vec{E}_t &= \vec{E}_{0t} \cos(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega_t t + \varepsilon_t)\end{aligned}\quad (6)$$

Als Grenzschicht zwischen den Medien n_i und n_t wählen wir die x - z -Ebene und zeichnen die Normale in Richtung der transmittierten Welle durch den Einheitsvektor \hat{u}_n aus.

Als Randbedingung für den Übergang zwischen zwei Grenzflächen lässt sich aus den Maxwell-Gleichungen in Materie folgern, dass die zur Grenzfläche tangential Komponente des elektrischen Feldes stetig sein muss. Wir drücken dies aus durch:

$$\hat{u}_n \times \vec{E}_i + \hat{u}_n \times \vec{E}_r = \hat{u}_n \times \vec{E}_t$$

Setzen wir die Wellen-Funktionen ein, so ergibt dies:

$$\hat{u}_n \times \vec{E}_{0i} \cos(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t) + \hat{u}_n \times \vec{E}_{0r} \cos(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t + \varepsilon_r) = \quad (7)$$

$$\hat{u}_n \times \vec{E}_{0t} \cos(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega_t t + \varepsilon_t) \quad (8)$$

Dieser Ausdruck muss zu jedem Zeitpunkt t an der Grenzfläche $y = 0$ gelten. Dies ist nur möglich, falls:

$$(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t) \Big|_{y=0} = (\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t + \varepsilon_r) \Big|_{y=0} = (\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega_t t + \varepsilon_t) \Big|_{y=0} \quad (9)$$

Betrachtet man diese Beziehung an einem festen Ort und variiert die Zeit, so wird deutlich, dass die Koeffizienten vor t identisch sein müssen:

$$\omega_i = \omega_r = \omega_t$$

Die Frequenzen der drei Wellen stimmen also überein.

Nach dieser Vorarbeit teilen wir nun den elektrischen Feldvektor \vec{E} und den magnetischen Feldvektor \vec{B} in Komponenten senkrecht und parallel zur Einfallsebene der Welle. Wir behandeln diese Komponenten getrennt.

\vec{E} senkrecht zur Einfallsebene Sei zunächst also \vec{E} senkrecht zur Einfallsebene und \vec{B} parallel zu jener. Aus der bereits erwähnten Stetigkeit der Tangentialkomponente des elektrischen Feldes (Gl. 7) folgt dann unter Verwendung der Gleichheit der Argumente der Kosinus-Funktionen (Gl. 9):

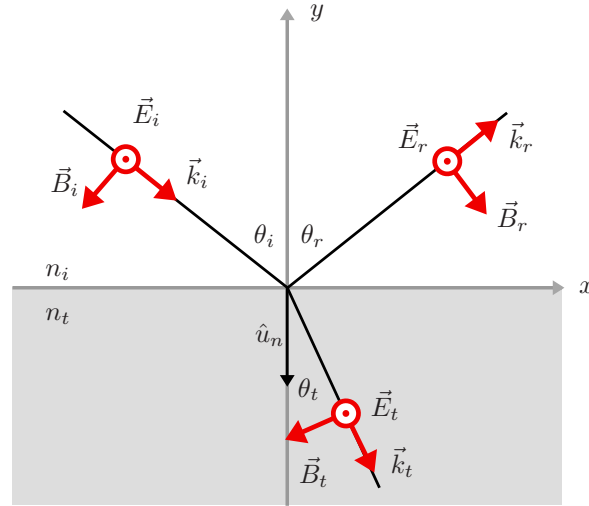
$$\vec{E}_{0i} + \vec{E}_{0r} = \vec{E}_{0t}$$

Als weitere Randbedingung findet man bei der Analyse der Maxwell-Gleichungen die Stetigkeit der zur Grenzfläche tangentialen Komponente von $\mu^{-1}\vec{B}$. Aus Abb. 3 geht hervor, dass damit unter Verwendung der Beträge der Magnetfelder gilt:

$$-\frac{B_i}{\mu_i} \cos \theta_i + \frac{B_r}{\mu_r} \cos \theta_r = -\frac{B_t}{\mu_t} \cos \theta_t \quad (10)$$

Am Anfang unserer Betrachtungen haben wir gezeigt, dass im Vakuum \vec{E} , \vec{B} und \vec{k} senkrecht aufeinander stehen. Analog kann man für den Fall in Materie zeigen:

$$\hat{k} \times \vec{E} = v\vec{B}$$

Abbildung 3: \vec{E} senkrecht zur Einfallsebene

Dies bedeutet für die Beträge, da es sich bei \hat{k} um einen Einheitsvektor handelt:

$$E = vB$$

Somit folgt:

$$\begin{aligned} B_i &= \frac{E_i}{v_i} \\ B_r &= \frac{E_r}{v_r} \\ B_t &= \frac{E_t}{v_t} \end{aligned}$$

Wir erinnern uns nun an das Reflexionsgesetz und setzen die obigen Gleichungen zusammen mit $v_i = v_r$ und $\theta_i = \theta_r$ in Gl. 10 ein:

$$\frac{1}{\mu_i \varepsilon_i} (E_i - E_r) \cos \theta_i = \frac{1}{\mu_t \varepsilon_t} E_t \cos \theta_t$$

Wir setzen hier die aus Gl. 6 stammenden Beträge der Wellenfunktionen ein. Dabei berücksichtigen wir wieder, dass die Argumente der Kosinus-Funktionen aller drei Wellen-Funktionen nach der in Gl. 9 mündenden Argumentation identisch sein müssen. Wir kürzen diese Kosinus-Funktionen und erhalten:

$$\frac{n_i}{\mu_i} (E_{0i} - E_{0r}) \cos \theta_i = \frac{n_t}{\mu_t} E_{0t} \cos \theta_t$$

Zusammen mit Gl. 10 und der Annahme einer gleichen Permeabilität in beiden Medien ($\mu_i = \mu_t$) erhalten wir zwei der *Fresnelschen Formeln*:

$$\begin{aligned} r_{\perp} &:= \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_{\perp} = \frac{n_i \cos \theta_i - n_t \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t} \\ t_{\perp} &:= \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)_{\perp} = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_i + n_t \cos \theta_t} \end{aligned}$$

\vec{E} **parallel zur Einfallsebene** Es verbleibt der Fall, dass \vec{E} parallel und entsprechend \vec{B} senkrecht zur Einfallsebene ist (siehe Abb. 4). In diesem Fall erhalten wir aus der Stetigkeit der Tangentialkomponente des elektrischen Feldes ähnlich zur obigen Diskussion:

$$E_{0i} \cos \theta_i - E_{0r} \cos \theta_r = E_{0t} \cos \theta_t$$

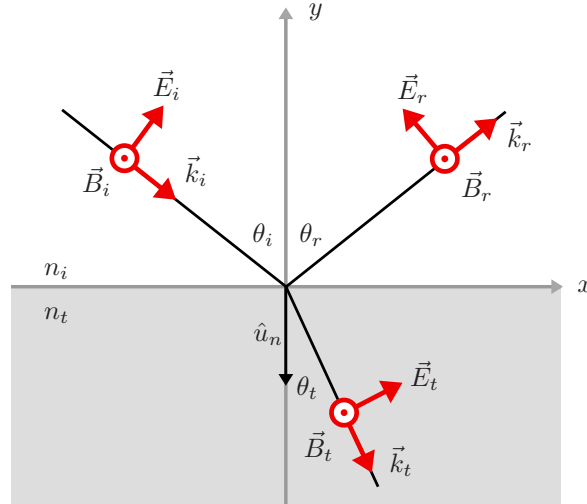


Abbildung 4: \vec{E} parallel zur Einfallsebene

Die Stetigkeit der tangentialen Komponente von $\mu^{-1}\vec{B}$ ergibt in diesem Fall:

$$\frac{1}{\mu_i v_i} E_{0i} + \frac{1}{\mu_r v_r} E_{0r} = \frac{1}{\mu_t v_t} E_{0t}$$

Zusammen mit den zum vorherigen Fall analogen Annahmen $v_i = v_r$, $\theta_i = \theta_r$ und $\mu_i = \mu_t$ ergeben sich zwei weitere *Fresnelsche Formeln*:

$$r_{\parallel} \equiv \left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right)_{\parallel} = \frac{n_t \cos \theta_i - n_i \cos \theta_t}{n_i \cos \theta_t + n_t \cos \theta_i}$$

$$t_{\parallel} \equiv \left(\frac{E_{0t}}{E_{0i}} \right)_{\parallel} = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_t + n_t \cos \theta_i}$$

Wir können die vier erhaltenen Gleichungen noch etwas vereinfachen und erhalten dann die endgültige Fassung der *Fresnelschen Formeln*:

$$r_{\perp} = \frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)} \quad (11)$$

$$r_{\parallel} = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} \quad (12)$$

$$t_{\perp} = \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)} \quad (13)$$

$$t_{\parallel} = \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t) \cos(\theta_i - \theta_t)} \quad (14)$$

Dabei nennt man r_{\perp} und r_{\parallel} *Amplituden-Reflexionskoeffizienten*. Folglich heißen t_{\perp} und t_{\parallel} *Amplituden-Transmissionskoeffizienten*.

2.3.1 Brewsterscher Winkel

In Abb. 5 haben wir die Amplituden-Reflexionskoeffizienten gegen den Einfallswinkel θ_i aufgetragen. Man sieht, dass es einen Winkel gibt, unter dem das elektrische Feld der reflektierten Welle keine Komponente parallel zur Einfallsebene hat. Diesen Winkel nennt man *Brewsterschen Winkel*. Unser Ziel ist es nun, diesen Winkel in Abhängigkeit von den Brechungsindizes der Materialien n_i und n_t zu bestimmen.

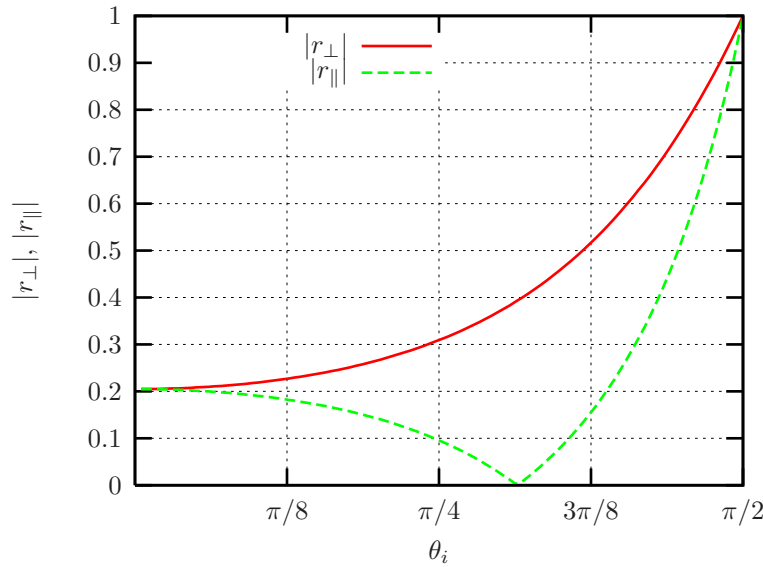


Abbildung 5: Reflexionskoeffizienten in Abhängigkeit vom Einfallswinkel für das Verhältnis $n_i/n_t = 1/1,51$

Wir suchen also einen Einfallswinkel für den der in Gl. 12 gegebene Koeffizient r_{\parallel} verschwindet. Dazu muss der Tangens im Nenner gegen unendlich streben. Dies ist gerade der Fall, wenn gilt:

$$\theta_i + \theta_t = \pi/2$$

Wir formen diese Bedingung nach θ_t um und setzen sie in das Brechungsgesetz (Gl. 5) ein:

$$n_i \sin \theta_i = n_t \sin(\pi/2 - \theta_i)$$

Wir formen um und erhalten so die gewünschte Beziehung für den Brewsterschen Winkel θ_B :

$$\tan \theta_B = \tan \theta_i = \frac{n_t}{n_i}$$

Da der elektrische Feldvektor der reflektierten Welle unter diesem Winkel nur eine Komponente senkrecht zur Einfallsebene hat, ist die Richtung dieses Vektors eindeutig festgelegt. Damit handelt es sich um linear polarisiertes Licht.

2.3.2 Innere Totalreflexion

Ein interessantes Phänomen stellt sich beim Übergang von einem optisch dichteren Medium n_i in ein dünneres Medium n_t ein. In diesem Fall gilt:

$$\sin \theta_i = \frac{n_t}{n_i} \sin \theta_t \quad \text{wobei } n_i > n_t$$

Mit zunehmendem Einfallswinkel θ_i wird somit auch der Winkel θ_t der transmittierten Welle zur Normalen größer. Die Welle wird immer weiter vom Lot weg gebrochen. Ist $\theta_t = 90^\circ$ so gilt:

$$\sin \theta_i = \frac{n_t}{n_i}$$

In diesem Fall nennen wir $\theta_i = \theta_c$ den *Grenzwinkel*. Ab diesem Einfallswinkel gibt es keine transmittierte Welle mehr. Es kommt zur *inneren Totalreflexion*.

Dieser Zusammenhang geht auch aus den in Abb. 6 dargestellten Reflexionskoeffizienten hervor. Ab einem gewissen Winkel hat der elektrische Feldvektor der reflektierten Welle die volle Größe.

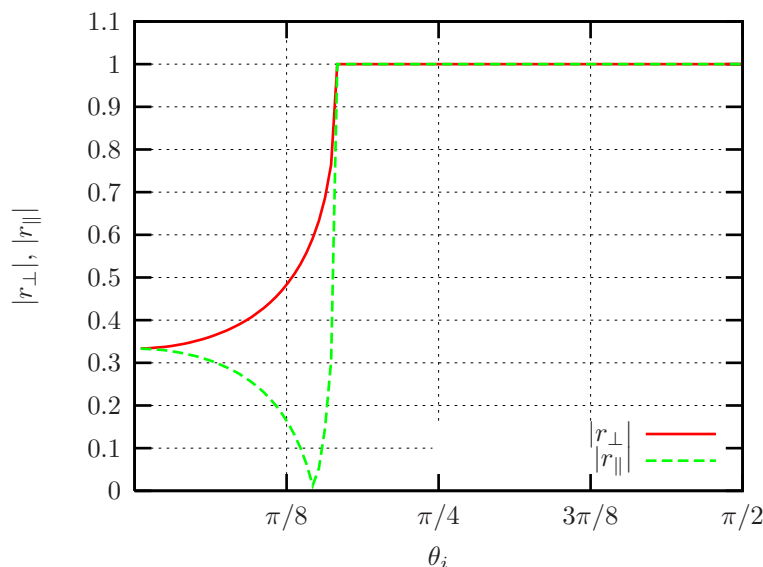


Abbildung 6: Reflexionskoeffizienten in Abhängigkeit vom Einfallswinkel für das Verhältnis $n_i/n_t = 2/1$

2.4 Doppelbrechung

Bei der Diskussion der Lichtausbreitung, Reflexion und Brechung haben wir uns bis jetzt auf *optisch isotrope Medien*, das heißt Medien, in denen sich Licht in allen Richtungen gleich ausbreitet, beschränkt.

Viele Kristalle weisen jedoch eine *optische Anisotropie* auf. Der Brechungsindex hängt in diesem Fall von der Richtung des Lichtes und von der Polarisation ab.

Um dies zu veranschaulichen betrachten wir den Kristall als Federmodell. Wir nehmen zum Beispiel an, dass die Federkonstanten in einer Raumdimension eine andere Stärke haben. In diesem Fall werden die Atome von Licht, welches einen elektrischen Feldvektor in dieser Richtung hat – in dieser Richtung polarisiert ist – anders angeregt. Folglich unterscheidet sich auch die entstehende Brechungswelle von jener, die bei Licht mit anders gerichtetem Feldvektor entsteht.

Gibt es eine Richtung im Kristall, in der sich Licht unabhängig von seiner Polarisation gleich ausbreitet, so nennen wir diese *optische Achse*. Allgemein kann ein Kristallgitter mehrere optische Achsen haben. Für uns sind im Folgenden jedoch nur Kristalle mit einer solchen Achse von Interesse.

Um die Diskussion etwas zu vereinfachen, führen wir den sog. *Hauptschnitt* ein. Dieser ist eine Ebene durch einen einfallenden Lichtstrahl und die optische Achse.

Betrachtet man nun einen in das Kristallgitter einfallenden Lichtstrahl beliebiger Polarisation, so kann es zur Aufspaltung dieses Lichtstrahls – zur *Doppelbrechung* – kommen. Man unterscheidet den *ordentlichen* oder *ordinären Strahl* und den *außerordentlichen* oder *extra-ordinären Strahl*.

Der ordinäre Strahl ist jener Anteil des einfallenden Lichts, der ausschließlich orthogonal zum Hauptschnitt polarisiert ist. Damit ist dieses Licht auch orthogonal zur optischen Achse polarisiert und die im Kristall entstehenden Elementarwellen, welche ebenfalls diese Polarisation haben, breiten sich in alle Richtungen gleich schnell aus. Somit wird dieser Strahl nach dem bekannten Brechungsgesetz gebrochen. Wir nennen den Brechungsindex dieses Strahls n_o .

Der extra-ordinäre Strahl ist der parallel zum Hauptschnitt polarisierte Anteil. Dieser hat wiederum parallel und senkrecht zur optischen Achse polarisierte Anteile. Dies hat zur Folge, dass sich die Elementarwellen in unterschiedlichen Richtungen mit verschiedenen Geschwindigkeiten ausbreiten. Der sich ergebene Effekt wirkt wie ein allgemein von n_o verschiedener Brechungsindex n_e des extra-ordinären Strahls.

Auf Grund der verschiedenen Brechungsindizes kommt es zu der erwähnten Aufspaltung des Lichtstrahls.

Bei Kristallen mit einer optischen Achse nimmt man zudem eine Klassifikation vor. Gilt $n_o \leq n_e$, so spricht man von einem *positiv einachsigen Kristall*. Andernfalls handelt es sich um einen *negativ einachsigen Kristall*.

Ein häufig genanntes Beispiel für einen einachsigen, doppelbrechenden Kristall ist Kalkspat. Dieser hat die Brechungsindizes³ $n_o = 1,66$ sowie $n_e = 1,49$ und ist damit negativ einachsig.

2.4.1 Doppelbrechende Polarisatoren

Das Phänomen der Doppelbrechung kann man sich auch zu Nutze machen, um linear polarisiertes Licht zu erzeugen, denn sowohl der ordinäre als auch der extra-ordinäre Strahl sind nach der obigen Argumentation linear polarisiert.

Eine Anordnung die dies leistet ist das *Nicol-Prisma* (siehe Abb. 7). Dieses besteht aus einem Kalkspat-Rhomboeder. Die Ecken werden auf einen Winkel von 68° geschliffen und der Rhomboeder dann in der Diagonalen durchgeschnitten. Beide Teile werden mit Kanadabalsam ($n=1,55$) zusammengekittet.

Durch diese Anordnung werden ordinärer und extra-ordinärer Strahl getrennt.

³Horst Stöcker: Taschenbuch der Physik. 2007, S. 366.

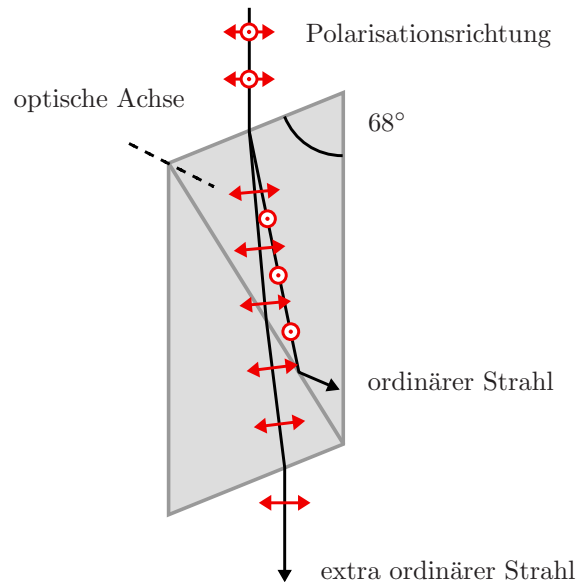


Abbildung 7: Das Nicol-Prisma

Da der Brechungsindex von Kanadabalsam etwas niedriger ist, als jener des ordinareren Strahls ($n_o = 1,66$), kann es zur Totalreflexion kommen. Es stellt sich heraus, dass dies ab einem Einfallswinkel von etwa 69° eintritt. Dies ist bei der gegebenen geometrischen Anordnung der Fall. Der ordinäre Strahl wird also total reflektiert und dann von einem geeigneten Material absorbiert.

Beim extra-ordinären Strahl ist der Brechungsindex von Kanadabalsam höher, als der des Strahls im Kalkspat ($n_e = 1,49$). Dieser Strahl passiert somit die Grenzfläche und tritt dann aus dem Kalkspat aus. Er ist wie gewünscht linear polarisiert.

Ein weiterer auf Doppelbrechung beruhender Polarisator ist der *Glan-Thompson-Polarisator*. Dieser basiert ebenfalls auf einem Kalkspat-Kristall. Jedoch sind diesmal zwei Kristalle mit einem Kitt, der einen sehr geringen Brechungsindex hat, verbunden. Damit wäre es möglich, dass beide Strahlen total reflektiert werden. Man wählt in diesem Fall die Geometrie so, dass es erneut nur beim ordinären Strahl zur Totalreflexion kommt.

3 Durchführung

3.1 Das Polarimeter

Wir verwenden ein Polarimeter (Abb. 8) um die im Therorieteil beschriebenen Eigenschaften nachzuweisen. Es besteht aus 2 Polarisationsfiltern (*Polarisator* und *Analysator*), zwischen denen sich ein Nicol-Prisma befindet. Hinter dem Analysator befindet sich das Okular, durch das ein einfallender Strahl beobachtet werden kann. Analysator und Okular sind zusammen mit dem Prisma drehbar gelagert, um den Winkel zwischen den optischen Achsen anzupassen. Eine Quecksilberdampfampe liefert durch ein Grünfilter monochromatisches Licht der Wellenlänge $\lambda = 546,07nm$. Durch die Konstruktion ändert sich bei einem Drehwinkel φ der

Glanzwinkel ϑ nur um die Hälfte. Der gesuchte Einfallswinkel berechnet sich somit zu $\alpha = 90^\circ - \vartheta = 90^\circ - \frac{1}{2}\varphi$.

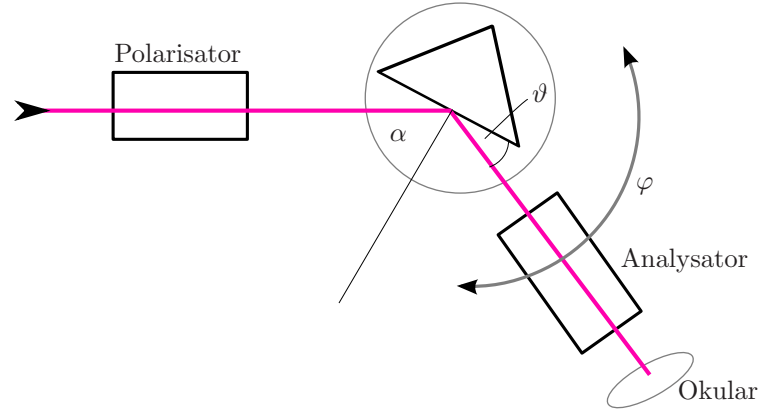


Abbildung 8: Schema des Polarimeters

3.2 Die Messung

1. Der Polarisator wird so eingestellt, dass er horizontal polarisiert und anschließend um 45° verdreht.
2. Ausrichten des Glasprismas auf dem Drehteller
3. Nun wird durch eine Drehung in 2.5° -Schritten von 90° ausgehend der Analysator bewegt und bei jedem Winkel bis zur vollständigen Dunkelheit verdreht. Wir erhalten somit 19 Messwerte für den Einfallswinkel und den Polarisationswinkel.
4. Jetzt wird erneut bei horizontaler Polarisationsrichtung der Brewster-Winkel des Glasprismas bestimmt. Wir bestimmen also den Einfallswinkel, bei dem die Intensität des reflektierten Strahls verschwindet. Diese Messung wird 5x wiederholt.

4 Auswertung

4.1 Drehung der Schwingungsebene

In Abb. 9 haben wir die gemessenen Polarisationswinkel gegen den Einfallswinkel aufgetragen. Damit wir kompatibel zur Theorie sind, mussten alle Werte erst, wie in der Durchführung besprochen, umgerechnet und die γ zusätzlich normiert werden, da er bei $\varphi = 90^\circ$ genau 45° betrug:

$$\alpha = \frac{\varphi}{2}$$

$$\delta = -\gamma + \gamma_{\varphi=90^\circ} + 45^\circ$$

Die theoretische Kurve im Plot kann man leicht herleiten, da für den Winkel δ zwischen der Polarisationsrichtung und der Einfallsebene des Lichtes gelten muss:

$$\tan \delta = -\frac{E_{r\perp}}{E_{r\parallel}}$$

mit den jeweiligen Anteilen des reflektierten Lichtes. Setzt man hier die Fresnelschen Formeln Gl. 11 bis 14 ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} \tan \delta &= -\frac{\sin(\alpha - \beta) \tan(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta) \tan(\alpha - \beta)} \\ &= -\frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} \end{aligned}$$

Durch die Eichung des Polarisationswinkels γ , dass er bei einem Einfallswinkel $\alpha = 90^\circ$ genau 0° betrug, gilt

$$\delta = \gamma + 45^\circ.$$

Schließlich erhalten wir mit Hilfe des Brechungsgesetzes Gl. 5 und einer Brechzahl $n_{Luft} \approx 1$ die Gleichung:

$$\gamma = \arctan\left(-\frac{\cos(\alpha - \arcsin(\sin(\alpha)/n))}{\cos(\alpha + \arcsin(\sin(\alpha)/n))}\right) - 45^\circ$$

Für den Plot haben wir einen Brechungsindex $n = 1.510(5)$ aus dem Praktikumsprotokoll verwendet und die Werte ab ca. 56° um 180° verschoben. Diese Drehung kann mit dieser Versuchsanordnung nicht erkannt werden.

4.2 Brewsterwinkel und Brechungsindex

Wir nähern die Messwerte durch einen linearen Fit

$$\begin{aligned} \gamma &= a\alpha + b \\ a &= -1.04(2) \\ b &= 1.6(2)rad \end{aligned}$$

an. Der Korrelationsgrad zwischen α und γ beträgt gute 0.9987. Der Brewsterwinkel sollte sich nun bei $\gamma = 45^\circ$ befinden.

$$\alpha_B = \frac{45^\circ - b}{a} = 45(11)^\circ$$

Außerdem erhalten wir so den Brechungsindex über

$$n = \frac{n_2}{n_{Luft}} = \tan(\alpha_B) = 1.0(4)$$

Auf die gleiche Art kann der wahre Brewsterwinkel mit dem bereits oben besprochenen Literaturwert berechnet werden zu

$$\alpha_{B,real} = \arctan(n) = 56,485(2)^\circ.$$

4.3 Brewsterwinkel aus der direkten Messung

Mit einem angenommenen Fehler von $\sigma_{\alpha_B} = 5^\circ$ der direkten Messungen, erhalten wir einen Mittelwert:

$$\begin{aligned}\overline{\alpha_B} &= 55.7(3)^\circ \\ \Rightarrow n &= 1,5(2)\end{aligned}$$

5 Einordnung der Ergebnisse

Die erhaltenen Werte sind recht gut, liegen wir doch jedes Mal mit unserem Fehlerintervall bei den Literaturwerten. Dies war keinesfalls zu erwarten, da vor allem die zweite Messung nur sehr schwer durchzuführen war. Wir konnten trotz mehrmaligem Aufbau und Justierung der Anlage keine komplette Auslöschung erreichen. Der Effekt der Abschwächung wurde aber deutlich stärker, als wir das eigentlich symmetrische Glasprisma um 180° drehten. Dies ist mit der Theorie nicht zu erklären und deutet auf einen *Hardwaredefekt* hin. Tatsächlich war das Prisma auch übersät mit Fingerabdrücken.

Trotzdem überzeugen die Ergebnisse und stellen einen erfolgreichen Abschluss des A-Praktikums dar.

A Tabellen und Grafiken

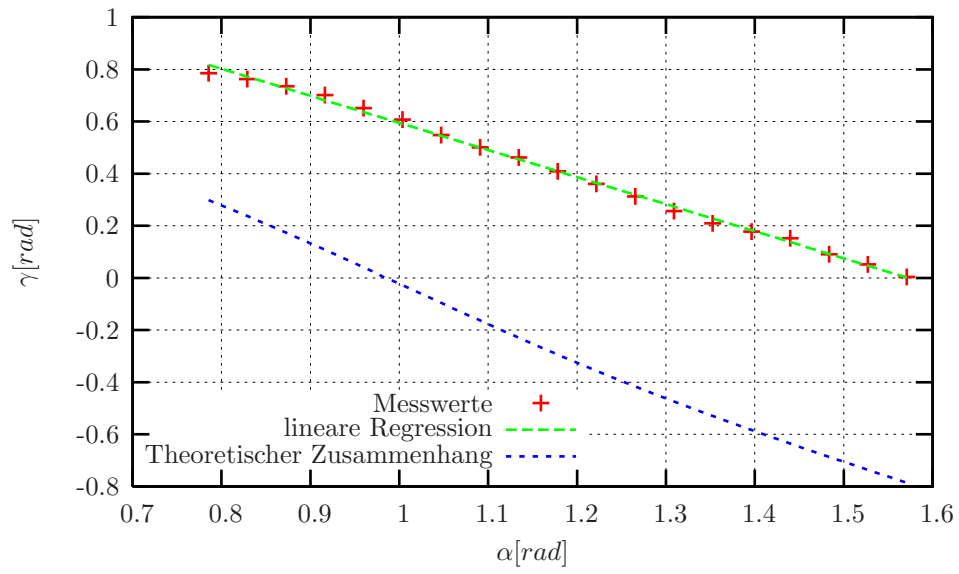


Abbildung 9: Der gemessene Einfallswinkel aufgetragen gegen den Polarisationswinkel