

Physikalisches A-Praktikum

Versuch 2

# Die Gravitationswaage

Praktikanten: Nils Kanning  
Steffen Klemer  
Durchgeföhrt am: 27.04.2006  
Gruppe: 12  
Assistent : Marcel Bliem

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>1</b>
2.1	Gravitation . . . . .	1
2.2	Torsion . . . . .	2
2.3	Bestimmung der Gravitationskonstanten . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Durchführung</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Auswertung</b>	<b>4</b>
4.1	Schwingungsdauer . . . . .	4
4.2	Bestimmung der Gravitationskonstanten . . . . .	5
4.3	Das Torsionsmodul des Fadens . . . . .	6
<b>5</b>	<b>Einordnung der Ergebnisse</b>	<b>6</b>

## 1 Einleitung

Die Gravitationskonstante  $\gamma$  gehört zu den wichtigsten Naturkonstanten um Phänomene auf großen Längenskalen vorhersagen zu können. Leider ist sie bisher auch eine der am wenigsten genau bestimmten. Der Versuch der Gravitationswaage, erstmalig beschrieben von CAVENDISH und EÖTVÖS, ist eine Möglichkeit  $\gamma$  zu messen.

## 2 Theorie

### 2.1 Gravitation

Das von GALILEI erahnte und von NEWTON formulierte Gravitationsgesetz

$$\vec{F} = \gamma \cdot \frac{M_1 M_2}{r^2} \cdot \vec{e}_r \tag{1}$$

beschreibt die Kraft  $\vec{F}$ , mit der 2 Körper der Massen  $M_1$  und  $M_2$  im Abstand  $r$  aufeinander einwirken. Dabei ist  $\gamma$  die Gravitationskonstante.  $\gamma \approx 6,673 \cdot 10^{-11} m^3/kg \cdot s^2$ .

Mit diesem Gesetz konnten erstmals KEPLERS drei Gesetze auf eine theoretische Grundlage gestellt werden. Aus GALILEIS Beobachtungen geht eine Proportionalität von schwerer ( $F \propto M_s$ ) und träger Masse ( $F = a \cdot M_t$ ) hervor.

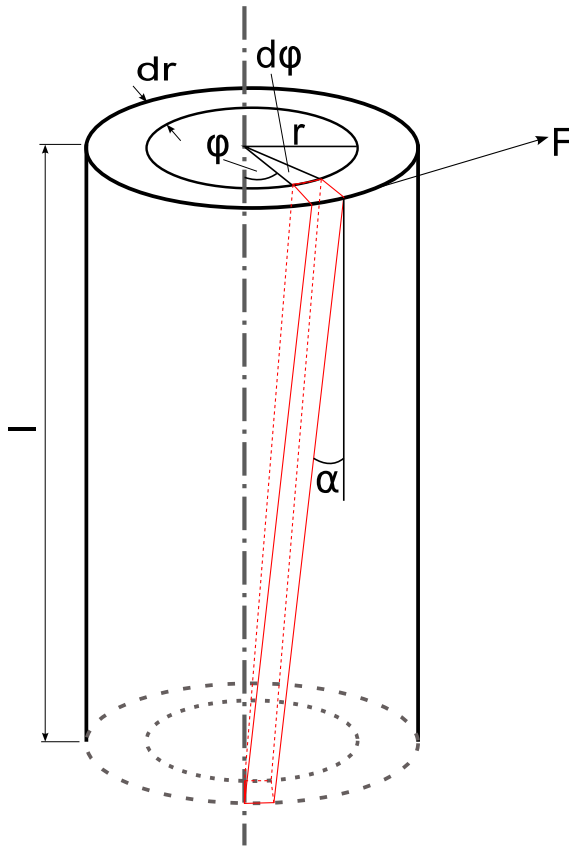


Abbildung 1: Torsion eines Vollzylinders

## 2.2 Torsion

Der Torsionsmodul  $G$  (auch *Schubmodul*) gehört zu den Körperkonstanten. Er beschreibt, wie sich ein Körper bei einer parallel gerichteten Kraft  $F$  entlang einer Fläche  $A$  schert. Dabei ist  $\tau$  die Scherspannung.

$$\tau = \frac{F_{\parallel}}{A} = G \cdot \frac{\Delta x}{l} \quad (2)$$

Betrachten wir nun einen langen Vollzylinder, so ergibt sich mit  $l \gg r$  bei einer Verdrillung um kleine  $\varphi$  eine Scherung um den Winkel  $\alpha$ . Mit der Näherung  $\alpha = r\varphi/l$  bekommen wir

$$\tau = G \cdot \frac{r\varphi}{l} \quad (3)$$

Betrachten wir nun die Kraft, die jedes Element eines Kreisrings des Radius  $r$  auf der selben Höhe des Zylinders verdreht, resultiert ein nötiges Drehmoment

$$dD = r \cdot F = \frac{A \cdot rG\varphi \cdot dr}{l} = \frac{2\pi r^3 G\varphi \cdot dr}{l} \quad (4)$$

Integriert über den gesamten Zylinder folgt schließlich

$$D = G \cdot \frac{\pi R^4}{2l} \cdot \varphi = K \cdot \varphi \quad (5)$$

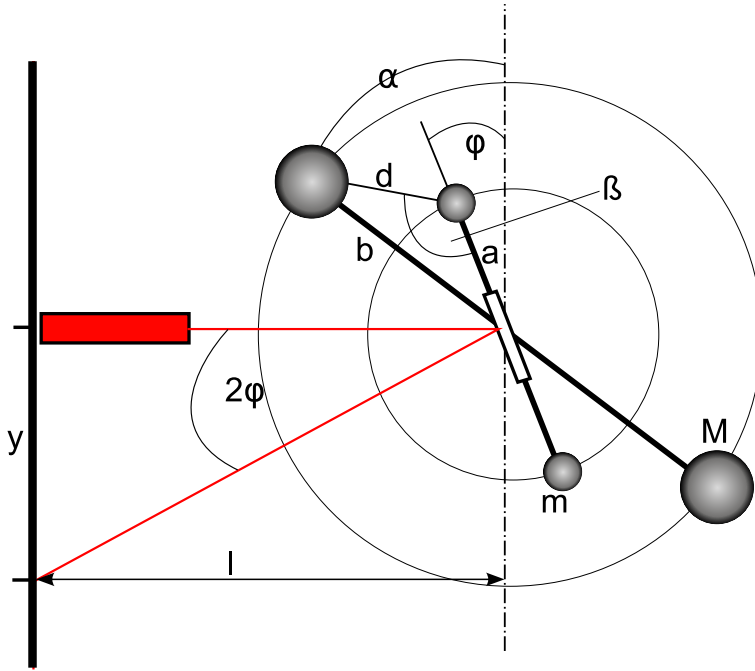


Abbildung 2: Aufbauskinne

Zusammen mit der Definition des Drehmomentes als  $D = I \cdot \ddot{\varphi}$  ergibt sich ein schwingfähiges System mit der Periodendauer  $T = 2 \cdot \pi \sqrt{I/K}$ . Daraus lässt sich die Konstante  $K$  bestimmen:

$$K = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot I \quad (6)$$

### 2.3 Bestimmung der Gravitationskonstanten

Die Bestimmung erfolgt mit Hilfe eines Aufbaus, wie er schematisch in Abbildung 2 zu sehen ist. Hierbei sind 2 kleine Kugeln der Massen  $m$  an einem Torsionsfaden hantelförmig aufgehängt. 2 große Kugeln der Masse  $M$  sind drehbar etwas außerhalb dieser Konstruktion gelagert. Durch Gleichsetzen von Gl. 5 und dem aus der Gravitationskraft der großen auf die kleinen Kugeln resultierenden Drehmoment ergibt sich

$$K\varphi = D_{grav} = 2a\gamma \frac{Mm}{d^2} \sin\beta \quad (7)$$

Hierbei ist  $a$  der Abstand von der Aufhängung zum Mittelpunkt der kleinen Kugel,  $d$  der Abstand zwischen der kleinen und der großen Kugel und  $\beta$  der Winkel zwischen  $d$  und  $a$ . Die 2 resultiert aus dem symmetrischen Aufbau des Systems.

Das Trägheitsmoment eines Hantelförmigen Körpers beträgt

$$I = 2m\left(\frac{2}{5}r^2 + a^2\right). \quad (8)$$

Mit der Vereinbarung einer kleinen Auslenkung  $\varphi$ , folgt  $\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{d}$ . Hierbei ist  $\alpha$  der Winkel zwischen  $a$  und der Nulllage der Verbindungsachse  $2b$  zwischen den beiden großen Kugeln. Zusammen mit dem Kosinussatz für  $d = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}$  folgt nun aus Gl. 7, 6 und 8 nach dem Auflösen nach  $\gamma$ :

$$\gamma = 4\pi^2\varphi \cdot \frac{\left(\frac{2}{5}r^2 + a^2\right)(a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha)^{\frac{3}{2}}}{T^2 M a b \sin\alpha}. \quad (9)$$

Gut zu erkennen ist, dass sich die Masse  $m$  der kleinen Kugel herausgekürzt hat.

Leider sind die Auslenkungen  $\varphi$  sehr klein. Darum werden sie durch einen Laserstrahl und einen Spiegel, der mittig auf der Hantelachse befestigt ist, auf einem Schirm in einiger Entfernung sichtbar gemacht.

### 3 Durchführung

Bevor mit der Durchführung der Messungen begonnen werden kann, muss sichergestellt werden, dass die Schwingung der Torsionshantel möglichst nicht unbeabsichtigt beeinträchtigt wird. Um störende Schwingungen zu dämpfen, ist die Anordnung in der Wand verankert. Die Torsionshantel befindet sich außerdem in einem mit Kupfergitter abgeschirmten Gefäß um eine elektrostatische Aufladung zu vermeiden. Um die Gravitationskraft der jeweils gegenüberliegenden großen Kugel auf die kleine Kugel der Torsionshantel zu minimieren, befinden sich die beiden Arme der Torsionshantel, sowie die beiden großen Kugeln in unterschiedlichen Höhen.

Weiter ist darauf zu achten, dass sich die beiden großen Kugeln der Versuchsanordnung in einer Ebene mit den beiden kleinen Kugeln befinden. Somit wirkt auf die kleinen Kugeln vor dem Beginn des Versuchs kein Drehmoment durch die Gravitationskraft der großen Kugeln und der Torsionsfaden ist nicht verdrillt.

In dieser Lage wird die Nullauslenkung des Lichtzeigers auf dem Schirm gemessen.

Anschließend werden die großen Kugeln zunächst um den Winkel  $\alpha = +54^\circ$  ausgelenkt, wodurch die Torsionshantel um eine neue Nulllage zu schwingen beginnt. Während dieser Schwingung wird in konstanten zeitlichen Abständen der Ausschlag des Lichtzeigers auf dem Schirm über mehrere Perioden protokolliert. Danach werden die großen Kugeln um den Winkel  $\alpha = -54^\circ$  von der ursprünglichen Position ausgelenkt. Nach einem Einschwingvorgang vollführt die Torsionshantel eine Schwingung um eine andere Nulllage. Die Position des Lichtzeigers wird analog zur ersten Messreihe protokolliert.

## 4 Auswertung

Die Messungen wurden mit der Apparatur II durchgeführt. Die Parameter dieses Versuchsaufbaus sind in Tab. 1 aufgeführt.

### 4.1 Schwingungsdauer

Um später die Gravitationskonstante  $\gamma$  bestimmen zu können, ist es zunächst nötig die Schwingungsdauer und die Nulllage der Torsionsschwingung zu ermitteln.

Zunächst wird von den Messwerten (Abb. 3 und Abb. 4) die Nullauslenkung des Lichtzeigers in Ruhe  $y_0$  subtrahiert und dann werden aus diesen bereinigten Messdaten die Maximalauslenkungen  $y_i$  des Lichtzeigers ermittelt.

Die Nulllage  $\bar{y}$  wird nun über die Näherungsformel

$$\bar{y}'_i = \frac{(y_i + 2y_{i+1} + y_{i+2})}{4} \quad (10)$$

unter Verwendung der Mittelwertbildung der so errechneten Werte bestimmt (siehe Tab. 2 und Tab. 3).

Senkrechte Lichtzeigerlänge	$L$	271 cm
Masse der großen Kugeln	$M$	9993 g
Masse der kleinen Kugeln	$m$	20 g
Radius der kleinen Kugeln	$r$	0,75 cm
Abstand Drehachse - Schwerpunkt kleine Kugeln	$a$	2,40 cm
Abstand Drehachse - Schwerpunkt große Kugeln	$b$	10,20 cm
Durchmesser des Torsionsfadens	$2 \cdot R$	20 $\mu\text{m}$
Effektive Länge des Torsionsfadens	$l$	(720 $\pm$ 10) mm

Tabelle 1: Parameter der Apparatur

Mit einem Messfehler von  $\Delta y = 0,25\text{cm}$  und unter Vernachlässigung des im Vergleich zu  $\Delta y$  kleinen mittleren quadratischen Fehlers erhalten wir für die beiden Messreihen die Nulllagen:

$$\begin{aligned}\bar{y}_1 &= (-8,79 \pm 0,25) \text{ cm} \\ \bar{y}_2 &= (18,13 \pm 0,25) \text{ cm} \\ \bar{y} &= (13,46 \pm 0,25) \text{ cm}\end{aligned}\quad (11)$$

Hierbei stammt  $\bar{y}_1$  von der Messreihe mit der Einstellung  $\alpha = +54^\circ$  und entsprechend  $\bar{y}_2$  von der Messreihe mit  $\alpha = -54^\circ$ . Das  $\bar{y}$  berechnet sich aus dem Mittelwert der Beträge.

Um nun die Schwingungsdauer  $T$  zu bestimmen, wird ausgenutzt, dass die Torsionsschwingung idealisiert eine gedämpfte Schwingung darstellt. Somit verläuft die Elongation als Funktion der Zeit bei den Nulldurchgängen in erster Näherung linear. Folglich kann die Zeit des Nulldurchgangs als Schnitt der Geraden durch die Nulllage und jener durch die, der Nulllage nächsten, Messwerte angenähert werden. Hieraus ergeben sich Werte  $T'_i/2$ , aus welchen durch Mittelwertbildung  $T$  hervorgeht.

Dabei wurde für den Fehler eines  $T'_i/2$  der Wert 15 s angenommen. Der Fehler des Mittelwerts  $T/2$  ist somit der Fehler der  $T'_i/2$ , dividiert durch die Wurzel der Anzahl der Werte (siehe Tab. 2 und Tab. 3). Über die Fehlerfortpflanzung erhalten wir mit  $T = 2 \cdot \frac{T}{2}$  für die beiden Messreihen:

$$\begin{aligned}T_1 &= (573 \pm 10) \text{ s} \\ T_2 &= (568 \pm 10) \text{ s}\end{aligned}$$

## 4.2 Bestimmung der Gravitationskonstanten

Bevor die Gravitationskonstante  $\gamma$  über die bereits diskutierte Relation (Gl. 9) bestimmt werden kann, muss aus der Nulllage  $\bar{y}$  zunächst die mittlere Auslenkung  $\varphi$  bestimmt werden.

Auf Grund des Reflexionsgesetzes ist der Winkel zwischen der Nullauslenkung des Lichtzeigers vor Versuchsbeginn und der Auslenkung in der neuen Nulllage  $\bar{y}$  doppelt so groß wie die Auslenkung der Torsionshantel  $\varphi$ . Wir erhalten zusammen mit dem Abstand des Spiegels von der Projektionsfläche  $L$ :

$$\varphi = \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{\bar{y}}{L}\right)\quad (12)$$

Mit Gl. 9 und den gegebenen Werten aus Tab. 1 erhalten wir nun  $\gamma$ :

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= (4,29 \cdot 10^{-11} \pm 0,20 \cdot 10^{-11}) m^3 kg^{-1} s^{-2} \\ \gamma_2 &= (8,98 \cdot 10^{-11} \pm 0,35 \cdot 10^{-11}) m^3 kg^{-1} s^{-2} \\ \bar{\gamma} &= (6,64 \cdot 10^{-11} \pm 0,3 \cdot 10^{-11}) m^3 kg^{-1} s^{-2}\end{aligned}$$

### 4.3 Das Torsionsmodul des Fadens

Zur Bestimmung des Torsionsmoduls  $G$  des Fadens gehen wir von Gl. 5 aus und erhalten für  $K$ :

$$K = G \cdot \frac{\pi R^4}{2l} \quad (13)$$

Zusammen mit Gl. 7 folgt hieraus eine Bestimmungsgleichung für  $G$ :

$$G = \gamma \frac{Mm}{d^2} \sin \beta \cdot \frac{4la}{\varphi \pi R^4} \quad (14)$$

Nun wird erneut die Beziehung  $\sin \beta = (b \sin \alpha)/d$  und der Kosinussatz für  $d = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha}$  verwendet. Zusammen mit der Berechnung für  $\varphi$  aus Gl. 12 ergibt sich:

$$G = \gamma \frac{Mmb \sin \alpha}{\sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha)^3}} \cdot \frac{8la}{\arctan(\bar{y}/L)\pi R^4} \quad (15)$$

Hierbei ist  $l$  die Länge des Torsionsfadens und  $R$  der Radius des gleichen.

Mit den Werten aus Tab. 1 und dem Literaturwert  $\gamma \approx 6,673 \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$  erhalten wir für das Torsionsmodul  $G$  des verwendeten Fadens mit  $\bar{y}$  aus Gl. 11:

$$G = 11(1) \cdot 10^{10} Pa$$

## 5 Einordnung der Ergebnisse

Die erhaltenen Werte für  $\gamma$  haben eine unerwartet große Abweichung vom Literaturwert von  $\gamma \approx 6,673 \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$ . Es fällt auf, dass  $\gamma_1$  deutlich unter und  $\gamma_2$  deutlich über dem Literaturwert liegt. Dabei überschneiden sich auch die Fehlerintervalle der beiden Werte nicht.

Diese Tatsache deutet auf einen systematischen Fehler bei der Messung hin. Betrachtet man erneut den Versuchsaufbau und die zu Grunde liegende Theorie, so folgt aus Gl. 7 mit den im Theorieteil diskutierten Näherungen für  $\sin \beta$  und  $d$ , dass  $\varphi$ , da  $K$  eine Konstante ist (Gl. 5), nur von der Auslenkung  $\alpha$  abhängt. Somit ist der deutliche Unterschied von  $|\bar{y}_1|$  und  $|\bar{y}_2|$  nicht zu erklären und es wäre zu erwarten gewesen, dass  $|\bar{y}_1| \approx |\bar{y}_2|$ .

Nimmt man an, dass die Nullauslenkung des Lichtzeigers  $y_0$  falsch bestimmt wurde, errechnet ein  $y'_0$  mit

$$y'_0 = \frac{\bar{y}_1 + \bar{y}_2}{2}$$

so hat man im Nachhinein  $y_o$  so angepasst, dass die erwartete Beziehung  $|\bar{y}_1| \approx |\bar{y}_2|$  erfüllt ist.

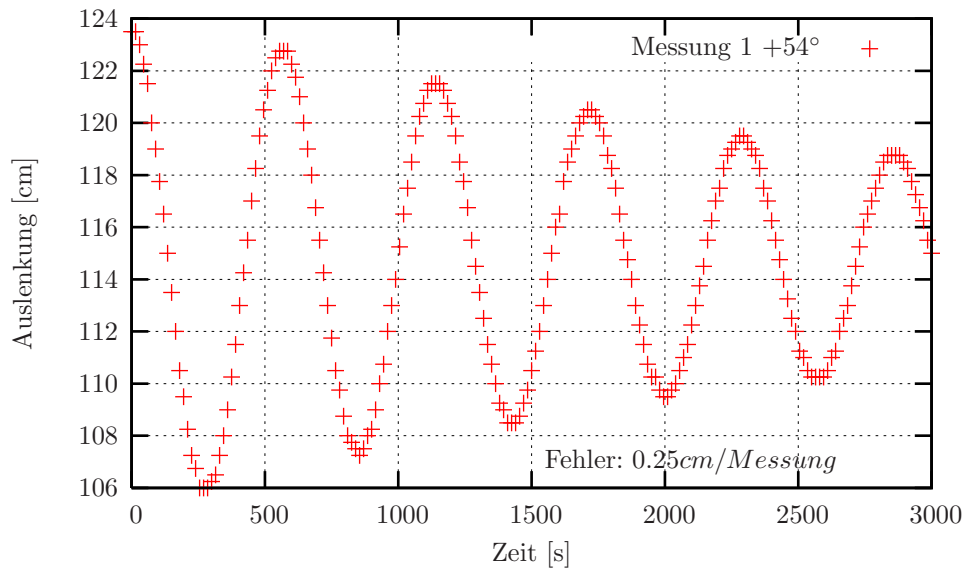
Errechnet man nun  $\gamma$  mit den neuen  $\bar{y}$ , so erhält man:

$$\gamma \approx 6,6(2) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

Das dieser Wert in der Nähe des Literaturwerts liegt, spricht viel für ein falsch bestimmtes  $y_0$ . Dagegen spricht die beobachtete Ruhe (Abwesenheit einer Schwingung) bei der anfänglichen Auslenkung von  $\alpha = 0^\circ$  und die 3 Messwerte zu Beginn, die alle auf ein  $y_0 = 123,5 \text{ cm}$  hindeuten. Das würde aber bedeuten, dass der Torsionsfaden nicht dem Gesetz der Proportionalität zu  $\varphi$  gehorcht, oder andere Kräfte/Momente auf die Massen eingewirkt haben. Ein Einfluss des Physikgebäudes liegt hierbei am nächsten, da der Versuchsaufbau direkt am Fenster befestigt war und die Masse des Gebäudes so in einer Richtung viel stärker wirkte, als in der anderen.

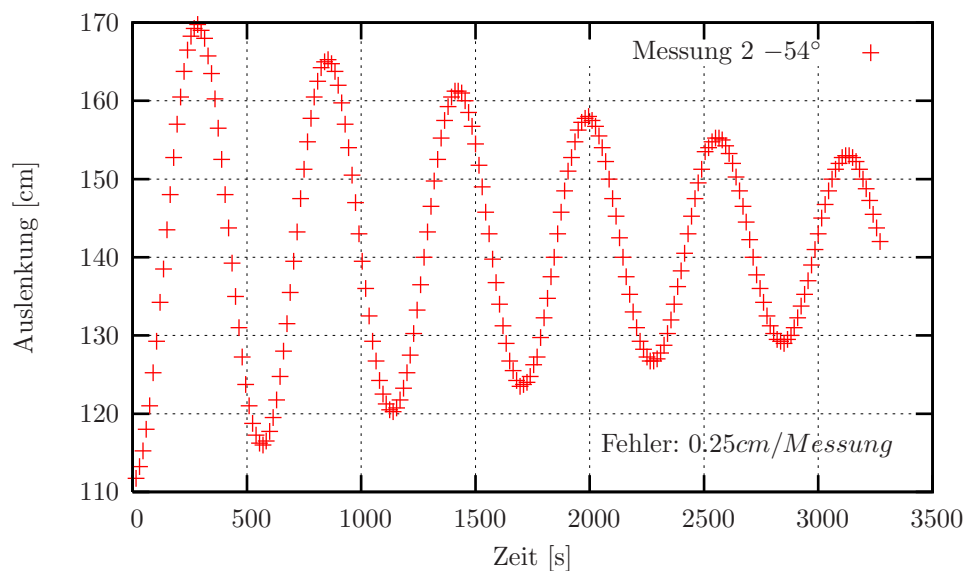
Mit dem gemittelten Wert von  $\gamma$  befinden wir uns, trotz des vergleichsweise geringen Aufwandes, in der Nähe der professionellen Messungen. Dabei wurden die Schwingungen, die das Gebäude (und damit das an der Wand befestigte Experiment) vollführt, die Abweichung von der Linearität in  $M = K * \varphi$  und die Abweichung von der idealen Hantelform durch den montierten Spiegel noch gar nicht beachtet.

Aufgrund der starken Abweichung der  $\bar{y}$ -Werte, ist auch das bestimmte Torsionsmodul des Fadens nicht sehr belastbar. Hier liegt der Literaturwert nicht im Fehlerintervall des bestimmten Wertes. Dies kann aber auch auf Produktionsschwankungen bei der Herstellung des Fadens, durch Alterung und die dauerhafte Beanspruchung im Praktikum zurückzuführen sein. Vor allem die letzte These spricht für die gemessene Verringerung des Torsionsmoduls und damit eine verringerte Festigkeit gegen Scherbeanspruchungen. Für belastbare Werte wäre hier in jedem Fall eine zweite Messung sinnvoll.

Abbildung 3: Messwerte der 1. Messreihe ( $\alpha = +54^\circ$ )

$t$ [s]	$y_i$ [cm]	$\bar{y}'_i$ [cm]	$T'_i/2$ [s]
270	-17,50	-8,81	287,6
570	-0,75	-8,81	288,9
855	-16,25	-8,81	284,1
1140	-2,00	-8,75	288,3
1425	-15,00	-8,75	283,8
1710	-3,00	-8,75	290,1
2010	-14,00	-8,81	287,4
2295	-4,00	-8,81	283,6
2580	-13,25		288,4
2865	-4,75		

Tabelle 2: Maximalauslenkungen der 1. Messreihe ( $\alpha = +54^\circ$ )

Abbildung 4: Messwerte der 2. Messreihe ( $\alpha = -54^\circ$ )

$t$ [s]	$y_i$ [cm]	$\bar{y}'_i$ [cm]	$T'_i/2$ [s]
285	46,25	18,25	282,7
570	-7,50	18,19	286,5
855	41,75	18,25	282,3
1140	-3,25	18,06	286,7
1425	37,75	18,06	283,7
1695	0,00	18,06	286,8
1995	34,50	18,19	282
2280	3,25	18,06	286,6
2565	31,75	18,06	282,3
2850	5,50		285,6
3135	29,50		

Tabelle 3: Maximalauslenkungen der 2. Messreihe ( $\alpha = -54^\circ$ )