

Physikalisches A-Praktikum

Versuch 3

Das Trägheitsmoment

Praktikanten: Nils Kanning
Steffen Klemer
Durchgeführt am: 04.05.2006
Gruppe: 12
Assistent : Marcel Bliem

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Theorie	2
2.1	Definition des Trägheitsmoments	2
2.2	Analogien zwischen Translation und Rotation	3
2.3	Der Steinersche Satz	3
2.4	Der Trägheitsellipsoid	4
2.5	Bestimmung des Trägheitsmoments	5
2.5.1	Trägheitsmoment aus Drehschwingung	5
2.5.2	Trägheitsmoment aus Winkelbeschleunigung	6
2.5.3	Trägheitsmoment eines physikalischen Pendels	6
2.5.4	Theoretische Herleitung verschiedener Trägheitsmomente	7
3	Durchführung	10
3.1	Drehschwingung	10
3.1.1	Bestimmung der Winkelrichtgröße	10
3.1.2	Messung der Periodendauern	10
3.1.3	Messung mit dem Tischchen	10
3.2	Winkelbeschleunigung	10
4	Auswertung	11
4.1	Drehschwingung	11
4.1.1	Winkelrichtgröße	11
4.1.2	Trägheitsmomente	11
4.1.3	Hauptträgheitsmomente des Tischchens	11
4.2	Winkelbeschleunigung	12
4.2.1	Rad ohne Zusatzgewicht	12
4.2.2	Rad mit Zusatzgewicht	12
5	Einordnung der Ergebnisse	12
A	Tabellen und Abbildungen	14

1 Einleitung

In der Physik beschäftigt sich die Dynamik mit der Bewegung von Objekten unter dem Einfluss von Kräften. Hierbei unterscheidet man zwischen Rotations- und Translationsbewegungen, in welche sich jede Bewegung eines starren Körpers aufteilen lässt. Die Translationsbewegungen lassen sich dabei unmittelbar durch die drei NEWTONschen Gesetze beschreiben. Um auch die Rotationen von Körpern beschreiben zu können, führt man weitere, aus diesen Gesetzen abgeleitete, Größen ein. Dabei kommt dem Trägheitsmoment eines Körpers eine zentrale Rolle zu, da dieses das Rotationsverhalten eines starren Körpers um eine gegebene Achse vollkommen charakterisiert.

In diesem Versuch sollen daher Eigenschaften des Trägheitsmoments untersucht und schließlich Trägheitsmomente verschiedener Körper bestimmt werden.

2 Theorie

2.1 Definition des Trägheitsmoments

Betrachtet man zunächst einen Massepunkt welcher um eine Achse A rotiert, so schreibt man ihm eine Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ zu:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Dabei ist $\vec{\omega}$ parallel zu A und der Ursprung des Koordinatensystems liegt auf A .

Die kinetische Energie lässt sich nun hierdurch ausdrücken:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m (\vec{\omega} \times \vec{r})^2$$

Nun betrachten wir einen starren Körper der Masse M als System von Massepunkten, die keine Relativbewegung ausführen. Jeder Massepunkt habe dabei die Masse m_i . Es folgt für die kinetische Energie eines sich drehenden Körpers:

$$E_{kin} = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2$$

Geht man zu einer kontinuierlichen Masseverteilung mit infinitesimalen Massen dm über, so folgt:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \int_M dm (\vec{\omega} \times \vec{r})^2$$

Oder ohne das Kreuzprodukt:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \vec{\omega}^2 \int_M dm r_{\perp}^2$$

An dieser Stelle definiert man das Trägheitsmoment I_A eines Körpers bezüglich der Rotation um eine Achse A als:

$$I_A = \int_M dm r_{\perp}^2 \quad (1)$$

Nun spricht man an Stelle von der kinetischen Energie des Körpers auch von der Rotationsenergie und erhält:

$$E_{rot} = \frac{1}{2} I_A \vec{\omega}^2$$

2.2 Analogien zwischen Translation und Rotation

Vergleicht man die Gleichung, die die Rotationsenergie eines Körpers beschreibt, mit der kinetischen Energie einer Translationsbewegung,

$$E_{rot} = \frac{1}{2} I \vec{\omega}^2$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m \vec{v}^2$$

so fällt die ähnliche Struktur dieser Gleichungen ins Auge.

Auch systematisch betrachtet, treten Analogien zwischen Translation und Rotation auf. Dabei stellen die Gesetze der Rotation Abstraktionen der Gesetze der Translation dar.

Translation		Rotation	
Ort	\vec{r}	Winkel	$\vec{\varphi}$
Geschwindigkeit	$\vec{v} := \dot{\vec{r}}$	Winkelgeschwindigkeit	$\vec{\omega} := \dot{\vec{\varphi}}$
Beschleunigung	$\vec{a} := \ddot{\vec{r}}$	Winkelbeschleunigung	$\vec{\alpha} := \ddot{\vec{\varphi}}$
Masse	m	Trägheitsmoment	I
Impuls	$\vec{p} := m \dot{\vec{r}}$	Drehimpuls	$\vec{L} := I \vec{\omega}$
Kraft	$\vec{F} := \dot{\vec{p}}$	Drehmoment	$\vec{M} := \dot{\vec{L}}$
kinetische Energie	$E_{kin} = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2$	Rotationsenergie	$E_{kin} = \frac{1}{2} I \vec{\omega}^2$

Tabelle 1: Analogien zwischen Rotations- und Translationsbewegungen

2.3 Der Steinersche Satz

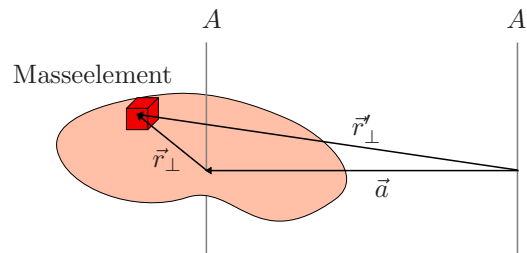


Abbildung 1: Der STEINERSche Satz

Wie durch Gl. 1 beschrieben, hängt das Trägheitsmoment eines Körpers stets von der Drehachse ab.

Sei A nun eine Drehachse durch den Schwerpunkt des Körpers. Sei weiter A' eine zu A parallele Achse, \vec{a} der senkrechte Abstand beider Achsen und \vec{r}'_{\perp} die zu A' senkrechte Komponente des Ortsvektors eines Massepunktes in einem Koordinatensystem mit Ursprung in einem Punkt auf A' .

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 I_{A'} &= \int dm \, \vec{r}_\perp'^2 \\
 &= \int dm (\vec{r}_\perp + \vec{a})^2 \quad \text{siehe Abb. 1} \\
 &= \int dm \, r_\perp^2 + \int dm \, 2 \vec{r}_\perp \vec{a} + \int dm \, \vec{a}^2 \\
 &= \int dm \, r_\perp^2 + 2 \vec{a} \int dm \, \vec{r}_\perp + \int dm \, \vec{a}^2
 \end{aligned}$$

Da \vec{r}_\perp der Abstand vom Schwerpunkt ist, folgt, dass $\int \vec{r}_\perp dm = \vec{0}$ und damit:

$$\begin{aligned}
 I_{A'} &= \int dm \, r_\perp^2 + \int dm \, \vec{a}^2 \\
 &= \int dm \, r_\perp^2 + m \vec{a}^2 \\
 &= I_A + m \vec{a}^2
 \end{aligned}$$

Diese Beziehung nennt man den STEINERSchen Satz.

2.4 Der Trägheitse ellipsoid

Bis hierhin wurden stets Rotationsbewegungen um bestimmte Achsen betrachtet. Um die Rotation dann zu beschreiben, muss zunächst das Trägheitsmoment bezüglich dieser Achse bestimmt werden.

Allgemeiner lässt sich das Rotationsverhalten eines Körpers um eine beliebige Achse durch den Schwerpunkt mit Hilfe des Trägheitstensors \mathbf{I} beschreiben. Dieser Tensor zweiter Stufe nimmt in einem zu bestimmenden körperfesten orthogonalen Bezugssystem $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ Diagonalgestalt an. Dabei zeigt ein Basisvektor \vec{z} dieses Bezugssystems in die Richtung, in der das Trägheitsmoment I_c des Körpers maximal ist, und ein weiterer (\vec{x}) in die, des minimalen Trägheitsmomentes I_a . Die Richtungen der drei Basisvektoren werden als Hauptträgheitsachsen bezeichnet.

Bei einer Rotation des Körpers ohne die Achse zu fixieren, stellt sich stets eine Rotation um eine der Hauptträgheitsachsen ein. In der Praxis gilt dies jedoch nicht für die Achse mittleren Trägheitsmoments, da hier bereits eine kleine Störung zur Instabilität führt.

Um aus dem Trägheitstensor das Trägheitsmoment bezüglich einer Achse A , die durch einen Vektor mit den Komponenten x , y und z mit $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = R$ gegeben ist, zu bestimmen, verwendet man folgende Relation, in der die Achse auf eine Länge 1 normiert wird:

$$I_A = \frac{1}{R} (x \quad y \quad z) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} I_a & 0 & 0 \\ 0 & I_b & 0 \\ 0 & 0 & I_c \end{pmatrix}}_{\mathbf{I}} \cdot \frac{1}{R} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Wählt man nun $I_A R^2 = 1$ konstant, so erhält man eine Ellipsoidengleichung:

$$1 = x^2 I_a + y^2 I_b + z^2 I_c$$

Das Trägheitsmoment I_A ist damit gleich:

$$I_A = \frac{1}{R^2}$$

Hierbei ist R der Abstand des Punktes auf dem Ellipsoid vom Ursprung.

Nun betrachten wir eine horizontale Drehung so, dass die c -Komponente des Winkelgeschwindigkeitsvektors verschwindet: $\omega_c = 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} \vec{L} \cdot \vec{\omega} &= I_a \omega_a^2 + I_b \omega_b^2 \quad \text{und} \\ \vec{L} \cdot \vec{\omega} &= I \omega^2 \\ \Rightarrow &\quad \text{mit } \omega_a = \omega \cos \alpha \text{ und } \omega_b = \omega \cos \beta \\ 1 &= \frac{I_a \cos^2 \alpha}{I} + \frac{I_b \cos^2 \beta}{I} \end{aligned} \quad (2)$$

also die Gleichung einer Ellipse. Dies wird deutlicher, wenn man $I_a = \frac{1}{a^2}$ sowie $x = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{I}}$ sowie auf analoge Weise I_b und y setzt:

$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

2.5 Bestimmung des Trägheitsmoments

2.5.1 Trägheitsmoment aus Drehschwingung

Um das Trägheitsmoment eines Körpers bezüglich einer Achse durch eine Drehschwingung zu bestimmen, betrachten wir zunächst das HOOKSche Gesetz:

$$F = -K r$$

Vollkommen analog gilt für das rückstellende Drehmoment bei einer Drehschwingung mit einer Auslenkung um den Winkel φ und einer Winkelrichtgröße D :

$$M = -D \varphi \quad (3)$$

Da dieses Drehmoment analog zum zweiten NEWTONSchen Gesetz auch durch das Trägheitsmoment und die Winkelbeschleunigung dargestellt werden kann, erhalten wir eine Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$-D \varphi = M = \dot{L} = I \dot{\omega} = I \ddot{\varphi}$$

Wir wissen, dass diese Differentialgleichung eine periodische Lösung mit der Periodendauer T hat:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}}$$

Nun können wir bei bekannter Winkelrichtgröße D und Periodendauer T auf das Trägheitsmoment schließen:

$$I = \frac{T^2 D}{4\pi^2} \quad (4)$$

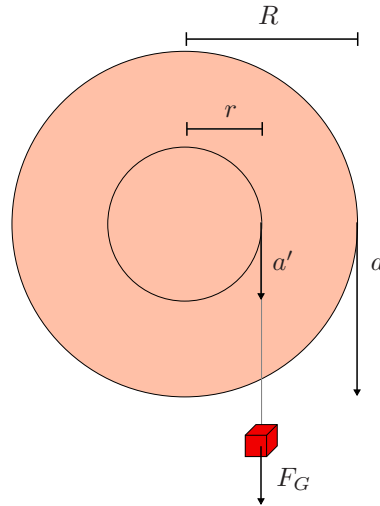


Abbildung 2: Winkelbeschleunigung eines Rades

2.5.2 Trägheitsmoment aus Winkelbeschleunigung

Eine andere Möglichkeit zur Bestimmung des Trägheitsmomentes ist die, mittels der Winkelbeschleunigung, die ein angreifendes Moment an einem drehbar gelagerten Probekörper hervorruft. Wie in Abb. 2 zu sehen ist, wirkt auf die Masse m die Gewichtskraft $F_G = m g$. Da sich die Räder drehen, wirkt auf das kleine Rad jedoch nur eine Kraft von $F = m g - m a'$. Somit wirkt ein Drehmoment von:

$$T = F r = m g r - m a' r$$

Mit $T = \dot{L} = I \dot{\omega}$ und $\dot{\omega} = \dot{v}/R = a/R$ folgt für das Trägheitsmoment I :

$$I = \frac{m g r R - m a' r R}{a}$$

Da die Drehungen der beiden Räder über ein für beide gleiches ω verknüpft sind, folgt mit der Relation $a/R = a'/r$ schließlich:

$$I = \frac{m g r R}{a} - m r^2 \quad (5)$$

2.5.3 Trägheitsmoment eines physikalischen Pendels

Ein physikalisches Pendel ist ein starrer Körper der Masse m_k , der in einer horizontalen Drehachse, die nicht durch den Schwerpunkt verläuft, gelagert ist. Im Folgenden bezeichnen wir den orthogonalen Abstand der Drehachse zum Schwerpunkt mit r_s .

Nun wirkt auf den Körper die Gravitationskraft, welche im Schwerpunkt angreift und, bei einer Auslenkung um den Winkel φ aus der Ruhelage, zu einer Rückstellkraft F_r führt:

$$F_r = -m_k g \sin \varphi$$

Für kleine Auslenkungen φ erhalten wir die Näherung:

$$F_r = -m_k g \varphi$$

Diese Kraft verursacht ein Drehmoment $M = -F_r r_s$, welches auch über das Trägheitsmoment dargestellt werden kann:

$$I \ddot{\varphi} = -r_s m_k g \varphi$$

Von der periodischen Lösung dieser Differentialgleichung zweiten Grades wissen wir, dass für die Periodendauer T gilt:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 I}{r_s m_k g}}$$

Somit erhalten wir für das Trägheitsmoment des schwingenden Körpers:

$$I = \frac{T^2 r_s m_k g}{4\pi^2}$$

Nun betrachten wir an Stelle eines allgemeinen Körpers ein Rad der Masse m_r , welches im Mittelpunkt gelagert ist. Auf diesem Rad befindet sich an einer Stelle im Abstand z vom Mittelpunkt eine Punktmasse m .

Für den Abstand des Schwerpunkts von der Drehachse erhalten wir dann:

$$r_s = \frac{z m}{m_r + m}$$

Zusammen mit $m_k = m_r + m$ gilt für das Trägheitsmoment der gesamten Anordnung:

$$I = \frac{T^2 z m g}{4\pi^2}$$

Um nun das Trägheitsmoment des Rades I_r zu bestimmen, muss jenes der Punktmasse subtrahiert werden:

$$I_r = \frac{T^2 z m g}{4\pi^2} - m z^2 \quad (6)$$

2.5.4 Theoretische Herleitung verschiedener Trägheitsmomente

Mit Hilfe von Gl. 1 können die Trägheitsmomente verschiedener Körper nun auch theoretisch bestimmt werden. Im folgenden wird stets eine konstante Dichteverteilung $\rho(\vec{x}) = \rho = \textit{konstant}$ angenommen.

Kugel (Achse durch Mittelpunkt) Bei einer homogenen Kugel mit Radius R und der Masse m sind auf Grund der Symmetrie alle Trägheitsmomente für die Rotation um den Mittelpunkt gleich. Mit $dm = \rho dV$ erhalten wir aus Gl 1:

$$I = \rho \int_V r_{\perp}^2 dV$$

In Kugelkoordinaten (r, φ, ϑ) gilt für das infinitesimale Volumen dV :

$$dV = r^2 \sin \vartheta dr d\varphi d\vartheta$$

Weiter gilt: $r_{\perp} = r \sin \vartheta$. Für das Trägheitsmoment einer Kugel ergibt sich:

$$\begin{aligned}
I &= \varrho \int_0^R dr r^4 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \sin^3 \vartheta \\
&= \varrho \frac{1}{5} R^5 2\pi \int_0^\pi d\vartheta \sin^3 \vartheta \\
&= \frac{2}{5} R^2 \underbrace{\frac{4}{3} \varrho \pi R^3}_m \\
&= \frac{2}{5} m R^2
\end{aligned}$$

Hohlzylinder (Rotation um die Symmetrieachse) Sei R_a der Außen-, R_i der Innenradius, m die Masse und L die Länge des Hohlzylinders. Dann gilt in Zylinderkoordinaten (r, φ, h) :

$$\begin{aligned}
I &= \varrho \int_0^L dh \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{R_i}^{R_a} dr r^3 \\
&= \frac{1}{2} \varrho L \pi (R_a^4 - R_i^4) \\
&= \frac{1}{2} \underbrace{\varrho L \pi (R_a^2 - R_i^2)}_m (R_a^2 + R_i^2) \\
&= \frac{1}{2} m (R_a^2 + R_i^2)
\end{aligned}$$

Vollzylinder (Rotation um die Symmetrieachse) Wir nehmen an, dass der Vollzylinder genau wie ein Hohlzylinder beschaffen ist, allerdings den Innenradius $R_i = 0$ hat. Somit erhalten wir mit $R = R_a$:

$$I = \frac{1}{2} m R^2$$

Scheibe (Rotation um die Symmetrieachse) Für eine Scheibe mit dem Radius R , der Masse m und der Höhe H erhalten wir in Zylinderkoordinaten (r, φ, h) :

$$\begin{aligned}
I &= \varrho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^H dh \int_0^R dR r^3 \\
&= \frac{1}{2} \underbrace{\varrho H \pi R^2}_m R^2 \\
&= \frac{1}{2} m R^2
\end{aligned}$$

Dünner Stab (Achse durch Schwerpunkt, senkrecht zur Symmetrieachse) Wir betrachten einen Stab der Länge L , der Masse m , und der Querschnittsfläche A bei welchem für den Durchmesser d von A gilt $d \ll L$. Die Integration in kartesischen Koordinaten (x, y, z) ergibt:

$$I = \varrho \int_A dA \int_{-L/2}^{+L/2} dx x^2$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{12} \underbrace{\varrho AL}_m L^2 \\
 &= \frac{1}{12} mL^2
 \end{aligned}$$

Dünner Stab (Parallel zur obigen verschobene Achse) Da die obige Achse durch den Schwerpunkt geht, folgt bei einer Verschiebung um die Länge A mit dem Satz von STEINER:

$$I = \frac{1}{12} mL^2 + mA^2$$

Hantel (Achse durch den Schwerpunkt, senkrecht zur Verbindung der Hantelköpfe) Es wird angenommen, dass das Trägheitsmoment einer Hantel näherungsweise als jenes zweier Punktmassen m im Abstand $L/2$ vom Mittelpunkt der Verbindung zwischen diesen Massen angenommen werden kann. Da das Trägheitsmoment additiv ist, folgt mit dem Satz von STEINER:

$$\begin{aligned}
 I &= m \left(\frac{L}{2}\right)^2 + m \left(\frac{L}{2}\right)^2 \\
 &= \frac{mL^2}{2}
 \end{aligned} \tag{7}$$

Würfel (Achse durch zwei gegenüberliegende Mittelpunkte der Außenflächen) Wir betrachten einen Würfel der Kantenlänge L . In kartesischen Koordinaten (x, y, z) ergibt sich das Trägheitsmoment zu:

$$\begin{aligned}
 I &= \varrho \int_{-L/2}^{L/2} dx \int_{-L/2}^{L/2} dy \int_{-L/2}^{L/2} dz (x^2 + y^2) \\
 &= \underbrace{\varrho L^3}_m \frac{1}{6} L^2 \\
 &= \frac{1}{6} mL^2
 \end{aligned}$$

Würfel (Rotationsachse entspricht einer Diagonalen) Auf Grund der Symmetrie des Würfels sind die Trägheitsmomente für die drei senkrechten Achsen, der Art für die oben das Trägheitsmoment berechnet wurde, gleich groß. Damit hat ein Punkt auf dem Trägheitsellipsoid des Würfels in drei senkrechten und den jeweils entgegengesetzten Richtungen den gleichen Abstand vom Ursprung. Hierdurch ist der Trägheitsellipsoid eindeutig bestimmt und hat die Form einer Kugel. Somit sind bei einem Würfel die Trägheitsmomente für alle Achsen durch den Ursprung gleich groß und wir erhalten wie oben:

$$I = \frac{1}{6} mL^2$$

3 Durchführung

3.1 Drehschwingung

Die Bestimmung mittels der Drehschwingung erfolgt mit einer horizontal gelagerten Spiralfeder, in deren Zentrum das zu untersuchende Objekt befestigt ist. Die Feder ist auch vertikal montierbar. So kann mittels einer Scheibe und verschiedenen Gewichten ein Moment auf sie ausgeübt werden. Insgesamt werden die Trägheitsmomente von 8 Körpern bestimmt: eine Kugel, ein Zylinder, ein Hohlzylinder, eine Scheibe, ein Hantelkörper sowie ein Würfel und ein Stab. Dazu wird noch ein "Tischchen", mit, über eine verdrehbare Vorrichtung, veränderbarem Trägheitsmoment, verwendet.

Hierbei werden zuerst die körperimmanenten Größen (Massen, Radien bei Kugel, Zylinder, Scheibe; Längen und Abstände bei den anderen Körpern) und der Abstand der Drehachse vom Schwerpunkt bestimmt.

3.1.1 Bestimmung der Winkelrichtgröße

Im ersten Versuch liegt die Drillachse horizontal und es wird die Auslenkung bei verschiedenen angreifenden Massen an den radialen Achsen und daraus resultierenden Momenten bestimmt. Dies erfolgt nun mit 6 verschiedenen Massen für Drehungen im und gegen den Uhrzeigersinn. Aus den Ergebnissen kann die Winkelrichtgröße aus Gl. 3 bestimmt werden.

3.1.2 Messung der Periodendauern

Nun kann in vertikaler Lage der Drillachse die Periodendauer der Schwingung der verschiedenen Körper bestimmt werden. Dazu werden selbige in ihrem Schwerpunkt mittig montiert. Beim Würfel wird zusätzlich die Periodendauer für eine Befestigung durch die Achse, die durch die Ecken läuft und beim Stab für eine Rotationsachse, parallel zu der durch den Schwerpunkt, ermittelt.

3.1.3 Messung mit dem Tischchen

Wie oben werden nun auch für das Tischchen, für Achsen in Abständen von 15° , verschiedene Periodendauern bestimmt.

3.2 Winkelbeschleunigung

Hierbei wird ein vertikal montiertes Rad, das durch 4 verschiedene, fallende Massen in Bewegung versetzt wird, verwendet. Es werden der Umfang des Rades und der Umfang des Bindfadens haltenden Rades bestimmt. Ein Markengeber zeichnet im Abstand von $0,1\text{ s}$ Zeitmarken auf.

Nun kann das Rad mit einem Zusatzgewicht zu einem physikalischen Pendel umgebaut werden. Es wird die Schwingungsdauer über 10 Schwingungen gemessen und danach das Gewicht auf der diametral anderen Seite befestigt und die Messung wiederholt.

Körper	I (durch T bestimmt) [$kg\ m^2$]	I (Theorie) [$kg\ m^2$]	$I/I_{Theorie}$
Kugel	4.29(2)E-04	4.23(6)E-04	1.01
Zylinder	2.90(2)E-04	2.78(6)E-04	1.04
Hohlzylinder	5.12(2)E-04	5.58(6)E-04	0.92
Hantelkörper	8.71(2)E-04	8.56(6)E-04	1.02
Würfel	5.17(2)E-04	5.00(6)E-04	1.03
Würfel (diag)	4.90(2)E-04	5.00(6)E-04	0.98
Scheibe	1.29(4)E-03	1.35(6)E-03	0.96
Stab	2.56(6)E-03	2.27(6)E-03	1.13
Stab (parallel)	3.34(5)E-03	2.98(6)E-03	1.12

Tabelle 2: Berechnete Drehmomente und Abweichungen der beiden Verfahren

4 Auswertung

4.1 Drehschwingung

4.1.1 Winkelrichtgröße

Um die Winkelrichtgröße D zu bestimmen setzten wir in Gl. 3 das Drehmoment $M = m g r$ ein. Dabei ist g die Fallbeschleunigung und $r = (0,081 \pm 0,001) m$ der Abstand in dem die Kraft angreift. Die gemessenen Winkelauslenkungen wurden in Abb. 5 und 6 aufgetragen. Durch lineare Regression erhalten wir Werte für den Faktor $\beta = \varphi/m$:

$$\begin{aligned}\beta_1 &= (49,4 \pm 3,5) kg^{-1} && \text{Auslenkung im Uhrzeigersinn} \\ \beta_2 &= (44,4 \pm 1,3) kg^{-1} && \text{Auslenkung gegen Uhrzeigersinn} \\ \bar{\beta} &= (45,0 \pm 1,5) kg^{-1}\end{aligned}$$

Beide haben einen Korrelationsfaktor von 0,826. Mit dem Wert $\bar{\beta}$ ergibt sich eine Winkelrichtgröße D von:

$$D = (0,0176 \pm 0,0006) kg\ m^2\ s^{-2}$$

Damit lässt sich gut rechnen, da die Probekörper in beide Richtungen schwingen werden.

4.1.2 Trägheitsmomente

Aus den gemessenen Werten, kann durch die theoretischen Formel auf Basis von Gl. 1 und die Körperkonstanten sowie durch Gl. 4 das Trägheitsmoment I bestimmt werden. Die Ergebnisse sind in Tab. 2 aufgeführt.

4.1.3 Hauptträgheitsmomente des Tischchens

Durch Auftragen der eingestellten Winkelwerte gegen die reziproke Quadratwurzel der berechneten Trägheitsmomente (Tab. 4), ergibt sich, wie aus Gl. 2 zu erwarten, eine Ellipse (Abb. 3), deren beiden Hauptachsen, den Hauptträgheitsachsen entsprechen. Somit ergeben sich 285° als Achse maximalen Trägheitsmoments und 195° als Achse minimalen Trägheitsmoments.

4.2 Winkelbeschleunigung

4.2.1 Rad ohne Zusatzgewicht

Durch Auftragen der Quadratwurzel der Abstände der Zeitmarken gegen die Zeit, kann die Winkelbeschleunigung mittels linearer Regression ermittelt werden (Abb. 4). Hierdurch ergeben sich für die verschiedenen Beschleunigungsmassen unterschiedliche Winkelbeschleunigungen α , wobei bei allen ein Korrelationsfaktor von ca. 0,98 ermittelt wurde. (Tab. 3).

Masse [kg]	Winkelbeschleunigung $\alpha[s^{-2}]$	$\sigma_\alpha[s^{-2}]$
0,1	7,40	0,20
0,2	3,89	0,05
0,5	1,58	0,02
1,0	0,87	0,01

Tabelle 3: Winkelbeschleunigung in Abhängigkeit der Masse

Mit Gl. 5 ergibt sich damit für das Trägheitsmoment des Rades I folgender Mittelwert:

$$I = (0,0737 \pm 0,0003) \text{ kg m}^2 \quad (8)$$

4.2.2 Rad mit Zusatzgewicht

Mittels der mittleren Periodendauer $T = 27,3(2) \text{ s}$ und Gl. 6 bekommen wir für I_r :

$$I_r = 6.8(3)E - 02 \text{ kg m}^2 \quad (9)$$

5 Einordnung der Ergebnisse

Die experimentell bestimmten Trägheitsmomente der verschiedenen Körper passen mit Abweichungen von meist nur wenigen Prozent zu den theoretisch aufgrund der Körpermaße und -formen vorhergesagten. Größere Abweichungen gibt es nur beim Stab und dem Hohlzylinder. Letztere wird vermutlich mit der Form des Probekörpers zusammenhängen, der einen nicht unbeträchtlichen Massenanteil als Halterung und Stabilisierung innerhalb der Außenwände besaß. Dieser Masseanteil wurde bei der theoretischen Bestimmung auch den Außenwänden in einem größeren Abstand von der Drehachse zugewiesen. Demzufolge war das bestimmte Trägheitsmoment kleiner als in der Theorie.

Beim Stab ergibt sich ein anderes Bild, hier ist das gemessene I bedeutend größer. Das kann einerseits mit der recht flachen Form des Stabes, die etwas von der theoretisch angenommenen abweicht und andererseits mit der nicht allzu genau bestimmbaren Masse des Stabes erklärt werden. Beide Werte liegen mit maximalem Fehler betrachtet aber doch recht dicht beisammen.

Die Trägheitsmomente des Tischchens für verschiedene Achsen weisen, polar wie in Abb. 3 dargestellt, deutlich die Form der theoretisch vorhergesagten Ellipse auf. Dabei ist die Symmetrie der Ellipse deutlich zu erkennen. Um die Hauptträgheitsachsen genauer bestimmen zu können wären entweder mehr Messwerte oder das

Annähern einer Ellipsengleichung an die bestimmten Werte notwendig.

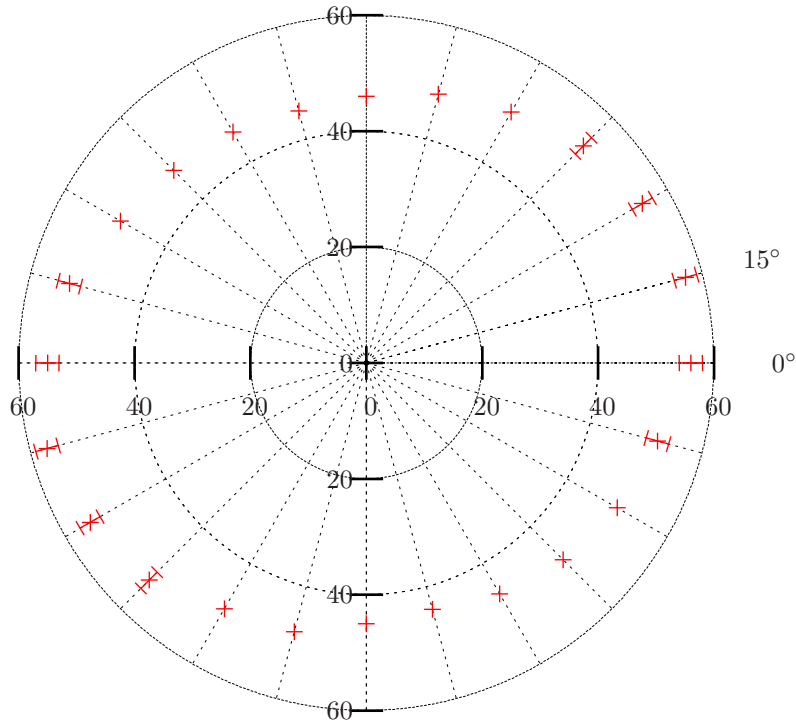
Die Bestimmung des Trägheitsmomentes des Rades mittels Wegmessung und Winkelbeschleunigung ergab einen Wert von $7.37(3) \cdot 10^{-02} \text{ kg m}^2$. Mit dem Zusatzgewicht ausgestattet und als physikalisches Pendel umfunktioniert ergibt sich nun ein I von $6.8(3) \cdot 10^{-02} \text{ kg m}^2$. Beide Werte liegen somit zwar nicht innerhalb der Fehlergrenzen, aber doch nahe beieinander. Eine Fehlerquelle ist hierbei, dass beim physikalischen Pendel die Reibung, welche einen Einfluss auf die Periodendauer hat, vernachlässigt wurde.

A Tabellen und Abbildungen

ϕ [°]	I [10^{-5} kg m^2]	σ_I [10^{-5} kg m^2]
0	31,6	2,7
15	29,9	2,6
30	31,9	2,7
45	34,9	2,8
60	39,3	3,0
75	43,4	3,1
90	46,8	3,2
105	47,6	3,3
120	46,5	3,2
135	44,5	3,1
150	40,7	3,0
165	34,7	2,8
180	33,0	2,7
195	29,9	2,6
210	32,1	2,7
225	34,4	2,8
240	40,8	3,0
255	43,3	3,1
270	4,73	3,3
285	49,5	3,3
300	47,1	3,2
315	43,0	3,1
330	39,1	3,0
345	35,7	2,8

Tabelle 4: Trägheitsmomente des Tischchens für verschiedene Winkel ϕ

Abstand vom Mittelpunkt der Ellipse $\frac{1}{\sqrt{I}} [kg^{-\frac{1}{2}}, m^{-1}]$ 



Abstand vom Mittelpunkt der Ellipse $\frac{1}{\sqrt{I}} [kg^{-\frac{1}{2}}, m^{-1}]$ 

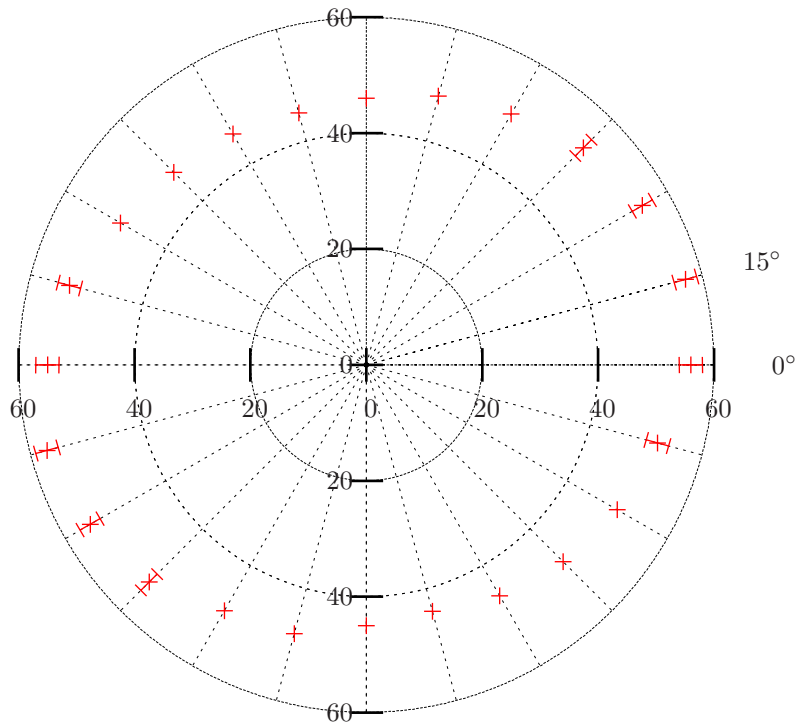


Abbildung 3: Rotationsellipse des Tischchens aufgetragen über den Achsenwinkel ϕ

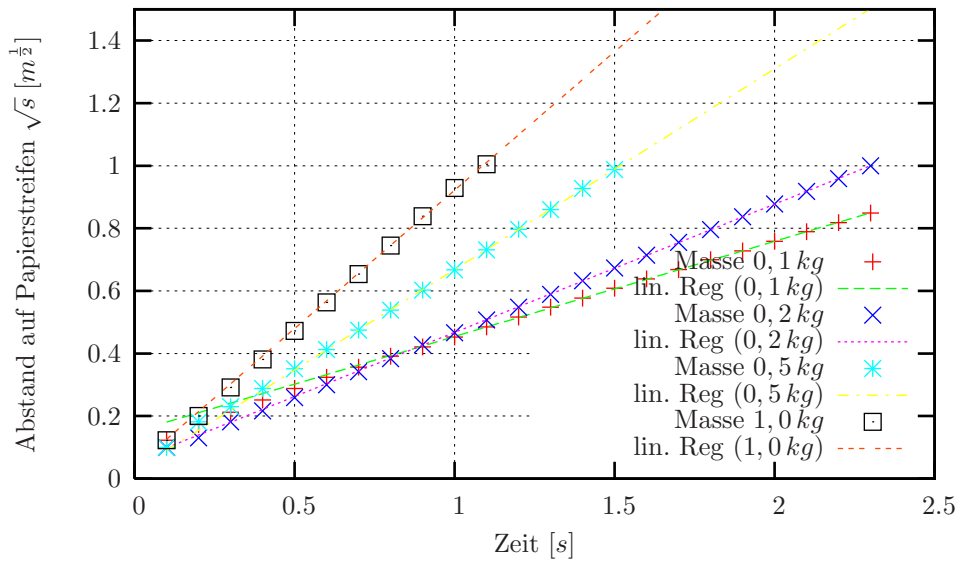


Abbildung 4: Abstände zur Bestimmung der Winkelbeschleunigung

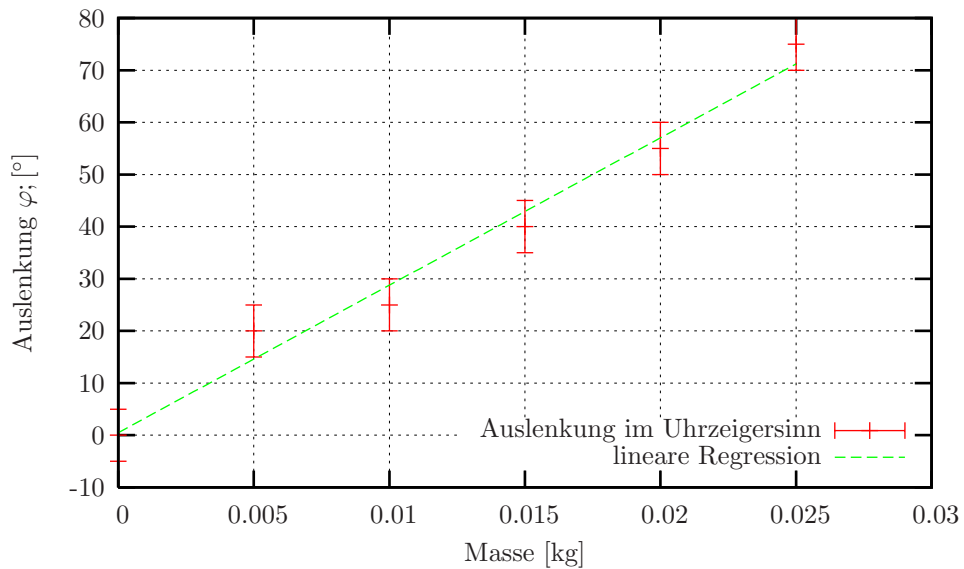


Abbildung 5: Auslenkungen im Uhrzeigersinn

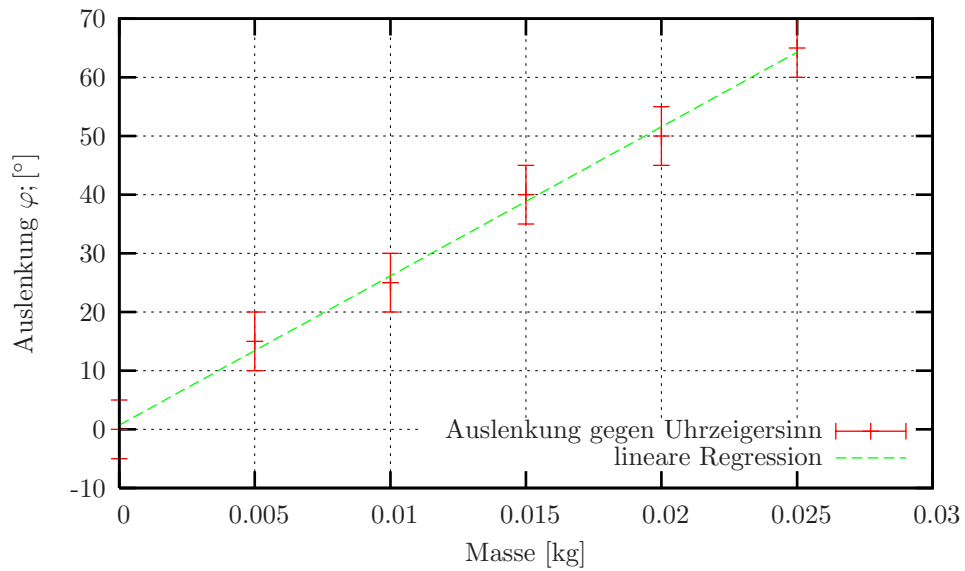


Abbildung 6: Auslenkungen gegen Uhrzeigersinn