

Physikalisches A-Praktikum

Versuch 4

Kreiselpräzession

Praktikanten: Nils Kanning
Steffen Klemer
Durchgeführt am: 11.05.2006
Gruppe: 12
Assistent : Marcel Bliem

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Theorie	2
2.1	Die Rotationsbewegung	2
2.2	Kreisel	3
2.3	Präzession	4
2.4	Nutation	5
3	Durchführung	6
3.1	Physikalisches Pendel	6
3.2	Präzession	6
3.3	Nutation	6
4	Auswertung	7
4.1	Trägheitsmoment um eine horizontale Achse	7
4.1.1	Theoretische Bestimmung	7
4.1.2	Bestimmung aus der Pendelschwingung	7
4.1.3	Bestimmung durch die Präzession	7
4.2	Trägheitsmoment um eine vertikale Achse	8
4.2.1	Theoretische Bestimmung	8
4.2.2	Bestimmung durch die Nutation	8
5	Einordnung der Ergebnisse	8
A	Tabellen und Grafiken	10

1 Einleitung

Die Erde und ein (früher) beliebtes Kinderspiel haben eine Gemeinsamkeit, beide lassen sich als gute Beispielobjekte für diesen Versuch missbrauchen. Die Erde, weil dank des Mondes und der Äquatorwulst ein recht konstantes Moment auf sie einwirkt, und der *Brummkreisel*, weil man mit einem Faden wunderbar plötzliche Änderungen seiner Drehbewegung erreichen kann. Bei beiden lässt sich so sehr schön die *Präzession* bzw. *Nutation* beobachten, die entsteht, wenn ein Moment auf einen rotierenden, starren Körper einwirkt. Dadurch fängt dieser an zu "taumeln" und es ergibt sich eine Überlagerung von mehreren Drehbewegungen. Mit der Kenntnis dieser Sachverhalte können u.a. auch die Sonnen- und Mondfinsternisse berechnet werden.

2 Theorie

2.1 Die Rotationsbewegung

Die bei der Translationsbewegung verwendeten Größen Geschwindigkeit \vec{v} und Beschleunigung \vec{a} sind bei der Rotation von starren Körpern nicht mehr geeignet um allgemeine Aussagen zu treffen. Dies kann man sich leicht an einer, um die Symmetrieachse drehenden, starren Scheibe verdeutlichen. Punkte, die auf einer radialen Achse vom Mittelpunkt liegen, haben eine größere Geschwindigkeit, je weiter außen sie sind. Was hierbei aber auffällt ist, dass all diese Punkte, bezogen auf eine radiale Achse, in der gleichen Zeit einen gleichen Winkel überstreichen. Dies führt zu der Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{v}{r_{\perp}}$$

und mit der gleichen Überlegung zur Winkelbeschleunigung

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{a}{r_{\perp}}.$$

Nun kann für eine einfachere Handhabbarkeit noch die Periodendauer T eingeführt werden, für die gilt:

$$T = \frac{\omega}{2\pi} \quad (1)$$

T entspricht also genau der Zeit, die der Körper für eine volle Drehung benötigt.

Analog zum Impuls \vec{p} der Translation kann nun der Drehimpuls \vec{L} als Summe der Einzelimpulse multipliziert mit dem Abstand von der Drehachse betrachtet werden:

$$\vec{L} = \sum_M \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

Mit der Definition des Impulses ($\vec{p} = m\vec{v}$) und des Trägheitsmomentes ($I = \int_M dm \vec{r}_{\perp}^2$) kann der Betrag von \vec{L} auch geschrieben werden als:

$$L = \int_M r dm \cdot v = \int_M r dm \cdot \omega r = I\omega$$

Und schließlich analog zur Kraft \vec{F} das Drehmoment

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

als die zeitliche Ableitung des Drehimpulses.

2.2 Kreisel

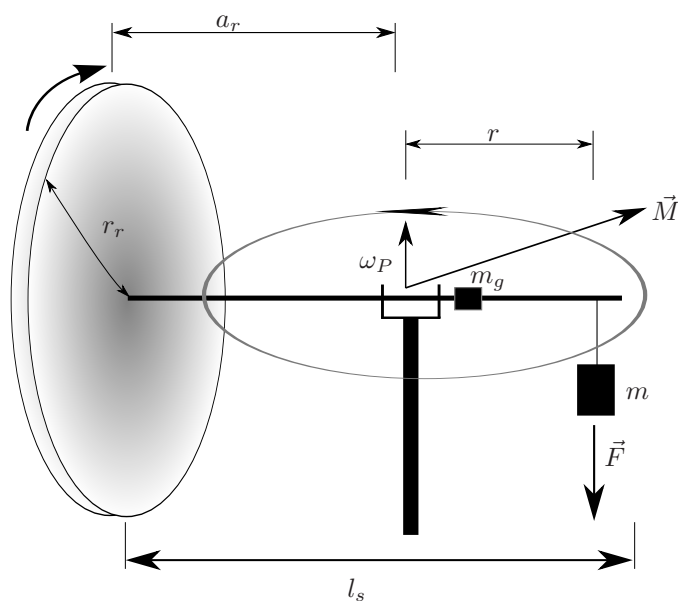


Abbildung 1: Schema des Versuchsaufbaus

Ein Kreisel ist ein Probekörper, der nur an einer Stelle unterstützt wird. Seine Rotationsachse ist also frei beweglich. Je nach Form und angreifenden Momenten werden seine Körperachse (Symmetrieachse) c , die Drehimpulsachse \vec{L} und die momentane Drehachse $\vec{\omega}$ nicht zusammen fallen. Fallen bei einem konstanten Drehimpuls c und $\vec{\omega}$ nicht zusammen, so spricht man von einer *Nutation*. Sind dagegen die Drehachse und die Körperachse gleich gerichtet, wirkt aber ein Moment, so handelt es sich um eine *Präzessionsbewegung*.

Der hier verwendete Kreisel ist ein Rad mit einer horizontalen Körper- und Drehachse. Er ist im Schwerpunkt an der Achse unterstützt. (Schema siehe Abb. 1) Entlang dieser horizontalen Achse hat es ein Trägheitsmoment wie ein Vollzylinder, also

$$I_x = \frac{1}{2} m_r \cdot r_r^2 \quad (2)$$

und entlang einer vertikalen Achse

$$I_z = \underbrace{\frac{m_g}{4} \left(R_g^2 + \frac{l_g^2}{6} \right)}_{I_{\text{Ausgleichsgewicht}}} + \underbrace{m_g a_g^2}_{I_{\text{Stab}}} + \underbrace{\frac{1}{4} m_r r_r^2 + m_r a_r^2}_{I_{\text{Rad}}} \quad (3)$$

Hierbei wurden die Additivität des Trägheitsmomentes, sowie der Satz von STEINER¹ benutzt. Dabei ist a_g der Abstand des Ausgleichsgewichts von der Drehachse

¹Herleitung und Erklärung dazu finden sich im Protokoll zu Versuch (3) Trägheitsmomente

und l_g seine Länge, a_r der Abstand des Rades von der Drehachse und l_s bezeichnet die Länge des Stabes. Das Rad wurde als flache Scheibe angenommenen.

Hierbei wird das Ausgleichsgewicht als Zylinder, der um eine Achse senkrecht zur Symmetrieachse rotiert, angesehen:

$$\begin{aligned} I &= \int_r r^2 dm \\ &= \varrho \int_R \int_{L/2} \int_0^{2\pi} (r^2 + k^2) r dk dr d\varphi \\ &= 2\pi\varrho \left(\frac{R^4 L}{4} \frac{1}{2} + \frac{R^2}{6} \left(\frac{L}{2} \right)^3 \right) \end{aligned}$$

2.3 Präzession

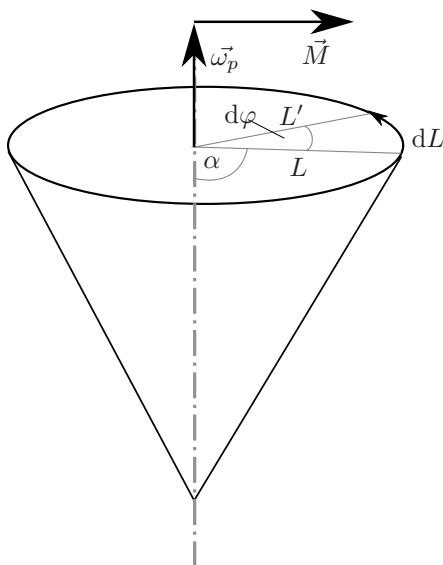


Abbildung 2: Schema der Präzession

Befestigen wir auf der gegenüberliegenden Seite der Achse ein Gewicht m , so wirkt aufgrund der Schwerkraft ein Moment auf die Achse.

$$\begin{aligned} M &= mgr \cdot \sin \alpha \\ M &= \frac{dL}{dt} \end{aligned}$$

Ist das wirkende Moment und damit die Auslenkung α gegen die Horizontale nicht zu groß, so kann nun mit der Näherung $dL \ll L$ gerechnet werden. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} dL &= L \sin \alpha d\varphi \\ M &= L \sin \alpha \cdot \frac{d\varphi}{dt} \end{aligned}$$

Der Drehimpuls bewegt sich nun mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_p = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{L \cdot \sin \alpha} = \frac{mgr \cdot \cancel{\sin \alpha}}{L \cdot \sin \alpha} = \frac{mgr}{I_x \omega} \quad (4)$$

Hierbei ist ω die Rotationsgeschwindigkeit des Rades.

Das Trägheitsmoment I_x kann hierbei entweder über die Form berechnet oder einfach über die Beziehung am *physikalischen Pendel*

$$I_x = \frac{T^2 r_s m_k g}{4\pi^2} - m_k r_s^2 \quad (5)$$

mit einer zusätzlichen Masse m_k im Abstand r_s vom Schwerpunkt des Rades bestimmt werden. Dabei ist T die Periodendauer der Schwingung.

Um auf das Beispiel vom Anfang zurückzukommen:

Im System Erde-Mond wirkt aufgrund der Äquatorwulst nicht überall die gleiche Gravitationskraft auf die Erde und es folgt ein Drehmoment, das eine Präzession zur Hauptträgheitsachse in Nord-Süd-Richtung hervorruft. Dies beschert uns schließlich Warm- und Kaltzeiten im 26 000 Jahr Rhythmus.

2.4 Nutation

Nun betrachten wir einen Momenten-freien Kreisel, bei dem $\vec{\omega}$ und die Körperachse nicht zusammenfallen. Am einfachsten ist dies zu erreichen, wenn wir den Versuchsaufbau mit dem Rad *ohne* das Zusatzgewicht aus der Präzessionsmessung erneut verwenden. Nachdem das Rad in Drehung versetzt wurde, sorgt ein Schlag gegen die Drehachse für eine Verschiebung der Drehimpulsrichtung. Nach dem Schlag ist diese aber wieder konstant und raumfest, da weiterhin kein Moment wirkt².

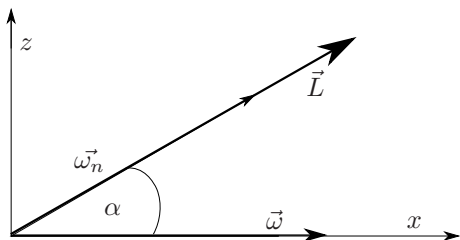


Abbildung 3: Zerlegung der Winkelgeschw. bei der Nutation

Betrachten wir die Anordnung nun in einem raumfesten System und zerlegen die Winkelgeschwindigkeit in einen Anteil parallel zur neuen Drehimpulsrichtung und einen senkrecht dazu, ergibt sich ein Zusammenhang wie in Abb. 3.

$$\begin{aligned} \omega_{n_z} &= \omega_n \cdot \sin \alpha \\ \frac{L_z}{\sin \alpha} &= \frac{L_x}{\cos \alpha} = L \\ L_z &= I_z \omega_{n_z} \\ L_x &= I_x \omega \\ \Rightarrow \omega_n &= \frac{\omega_{n_z}}{\sin \alpha} = \frac{L_z}{I_z \cdot \sin \alpha} = \frac{L_x}{\cos \alpha \cdot I_z} = \frac{1}{\cos \alpha} \frac{I_x}{I_z} \omega \end{aligned}$$

Mit einer kleinen Verschiebung (einem *leichten* Schlag) von ω_n aus der Horizontalen, gilt in erster Näherung $\cos \alpha \approx 1$. Es ergibt sich nun ein linearer Zusammenhang zwischen der Nutationsfrequenz und der Kreisfrequenz:

²Die Anordnung war vorher austariert

$$\omega_n = \frac{I_x}{I_z} \omega. \quad (6)$$

3 Durchführung

Um die Phänomene der Präzession und Nutation zu untersuchen, wird der bereits im Theorieteil beschriebene, in einem Punkt unterstützte, Kreisel verwendet. Insbesondere wird es uns interessieren, aus charakteristischen Größen der Präzession und Nutation auf das Trägheitsmoment des Kreisels zu schließen.

3.1 Physikalisches Pendel

Um das, später durch die Präzessionsfrequenz zu bestimmende, Trägheitsmoment um die horizontale Achse einordnen zu können, wird dieses zunächst auf eine alternative Weise bestimmt.

Der Kreisel wird so arretiert, dass nur noch eine Rotation um eine horizontale Achse möglich ist. Nun wird er, durch ein, auf der Kreiselscheibe angebrachtes, Zusatzgewicht, in ein physikalisches Pendel umgewandelt. Dessen Periodendauer wird durch Messungen über mehrere Perioden gemittelt. Diese Messungen werden mit einem an diametraler Stelle angebrachten Zusatzgewicht wiederholt.

3.2 Präzession

Nun wird die Arretierung entfernt. Die Rotation des Kreisels wird also tatsächlich nur noch an einem Punkt unterstützt. Damit diese Anordnung bereits ohne Rotation stabil ist, muss zunächst der Schwerpunkt des gesamten Kreisels durch ein Ausgleichgewicht an einer geeigneten Stelle auf der Symmetrieachse des Kreisels auf den Lagerungspunkt gebracht werden.

Bevor der Kreisel nun mit Hilfe einer Schnur in Rotation um eine horizontale Achse versetzt werden kann, wird ein Papierstreifen am Rad des Kreisels angebracht um später dessen Rotationsfrequenz mittels einer Lichtschranke bestimmen zu können. Wurde der Kreisel dann in Rotation versetzt, so wird zunächst die Periodendauer mit dieser Lichtschranke bestimmt. Anschließend wird ein Zusatzgewicht an die Symmetrieachse des Kreisels gehängt, wodurch dieser zu präzessieren beginnt. Die Periodendauer der Präzession wird mit einer Stoppuhr über eine halbe Periode bestimmt und danach das Zusatzgewicht wieder entfernt. Dieser Vorgang aus Bestimmen der Periodendauer mit der Lichtschranke, Anhängen des Zusatzgewichts und dem Messen der Präzessionsperiode wird mehrere Male wiederholt.

Der gesamte Ablauf wird außerdem mit Zusatzgewichten unterschiedlicher Masse wiederholt.

3.3 Nutation

Zur Untersuchung der Nutation wird der Kreisel ohne Zusatzgewicht in Rotation versetzt und die Periodendauer erneut mittels der Lichtschranke gemessen. Anschließend wird der Kreisel durch einen Stoß in eine Nutationsbewegung gebracht, deren Periodendauer mit Hilfe einer Stoppuhr ermittelt wird.

Auch dieser Ablauf wird mehrere Male wiederholt.

4 Auswertung

4.1 Trägheitsmoment um eine horizontale Achse

4.1.1 Theoretische Bestimmung

Aus den vorgegebenen Größen des Rades ergibt sich das Trägheitsmoment um die horizontale Symmetrieachse des Kreisels mit Gl. 2 zu:

$$I_x = 9,904 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2 \quad (7)$$

4.1.2 Bestimmung aus der Pendelschwingung

Aus den Messungen der Schwingungsdauer über je fünf Perioden erhalten wir eine mittlere Periodendauer T :

$$T = 2,36(3) \text{ s}$$

Zusammen mit Gl. 5 und den gemessenen Daten der exzentrisch angebrachten Zusatzmasse (Tab. 2) erhalten wir ein Trägheitsmoment von:

$$I_x = 9,2(3) 10^{-3} \text{ kg m}^2 \quad (8)$$

Da die verwendeten Massen und Längen gegeben waren, wurde nur die Periodendauer T als fehlerbehaftet betrachtet.

4.1.3 Bestimmung durch die Präzession

Aus den gemessenen Periodendauern der Kreiselrotation T und der Präzession T_P lassen sich mit der elementaren Relation in Gl. 1 die entsprechenden Rotationsfrequenzen ω und ω_p bestimmen (Tab. 4). Dabei ergibt sich ω durch entsprechende Mittelwertbildung der gemessenen Größen T_{vor} und T_{nach} vor und nach dem An- bzw. Abhängen des Zusatzgewichtes.

Auf Grund von Gl. 4 erwarten wir eine Proportionalität zwischen ω_p und $1/\omega$:

$$\omega_p \propto \frac{1}{\omega}$$

Diese beiden Größen sind in Abb. 4 aufgetragen und durch lineare Regression erhalten wir die Proportionalitätskonstante β in Abhängigkeit vom jeweiligen Zusatzgewicht m_k . Ebenfalls aus Gl. 4 wissen wir, dass für diese Konstante β theoretisch gilt:

$$\beta = \omega_p \omega = \frac{m_k g r}{I_x} \quad (9)$$

Hieraus lässt sich nun das Trägheitsmoment des Rades für eine horizontale Achse I_x bestimmen (Tab. 4).

Durch gewichtete Mittelwertbildung erhalten wir hieraus das Trägheitsmoment:

$$I_x = 10.8(5) \text{ kg m}^2 \quad (10)$$

Hierbei wurden die Fehlerwerte der Regression berücksichtigt, da die Messung für 30g doch sehr von den anderen abweicht.

4.2 Trägheitsmoment um eine vertikale Achse

4.2.1 Theoretische Bestimmung

Das Trägheitsmoment um eine vertikale Achse folgt mit den gemessenen Größen und Gl. 3:

$$I_z = 51.2(6) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$$

Die Masse des Stabes wurde mit 100g angenommen.

4.2.2 Bestimmung durch die Nutation

Analog zum Vorgehen bei der Präzession, kann aus den Nutationsmessungen die Rotationsfrequenz ω und die Nutationsfrequenz ω_n bestimmt werden (Tab. 5). Dabei wird angenommen, dass die Messung von je fünf Nutationsperioden $5 \cdot T_n$ mit einem Fehler von 0,25 s behaftet ist. Außerdem wird der Messung der Periodendauer der Rotation des Rads $2 \cdot T_{vor}$ und $2 \cdot T_{nach}$ ein Fehler von 0,005 s zugeschrieben.

Laut Gl. 6 sollte nun gelten:

$$\omega_n \propto \omega$$

Durch lineare Regression (Abb. 5) erhalten wir hier die Proportionalitätskonstante δ :

$$\delta = 0,154(4)$$

Aus Gl. 6 wissen wir außerdem den theoretischen Wert dieser Konstanten:

$$\delta = \frac{\omega_n}{\omega} = \frac{I_x}{I_y} \quad (11)$$

Diese Konstante hängt somit, im Gegensatz zu der oben definierten Konstante β , nicht von einer Zusatzmasse m ab, sondern stellt eine Eigenschaft des Körpers dar.

Außerdem erhalten wir durch Gl. 11 die Möglichkeit mit Hilfe des bereits bestimmten I_x nun auch das Trägheitsmoment bezüglich einer vertikalen Achse I_y zu bestimmen. Verwenden wir hierfür die vorher (7, 8 und 10) bestimmten Werte, so erhalten wir:

$$I_z = 64(4) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$$

Der Wert von I_x aus der Präzessionsmessung ging hierbei nur mit einer Gewichtung von 1/5 ein, da er doch sehr von den anderen beiden abweicht. Die anderen beiden mit je 2/5.

5 Einordnung der Ergebnisse

Während die Bestimmung des horizontalen Trägheitsmomentes durch die Form des Körpers und die Pendelmessung noch recht gut korrelieren, weicht der aus der Präzession bestimmte Wert bereits ein wenig ab. Die Messung gestaltete sich schwierig, da die Lichtschranke zur Bestimmung der Rotationsgeschwindigkeit ab und an versagte und dadurch einige Messwerte nicht ermittelt werden konnten. So waren

beispielsweise in 3 Fällen nur 3 Einzelmessungen, stattdessen der geforderten 4 möglich. Am Fehlerwert der Regression im Fall von 30g ist das wahrscheinlich am ehesten zu erkennen.

So verwundert es nicht, dass die beiden Werte von I_z ebenfalls um einige Werte auseinanderliegen. Die großen Fehlerintervalle überlappen sich hierbei noch nicht. Erstaunlich für die Experimentatoren ist aber, dass sie trotzdem zumindest in der gleichen Größenordnung einzuordnen sind.

Im Rahmen der Fehlerwerte konnten trotzdem alle theoretisch vorhergesagten Abhängigkeiten nachgewiesen werden, vor allem die beiden hervorstechenden zwischen der Rotationsfrequenz und der Präzessionsfrequenz sowie der Rotationsgeschwindigkeit und der Nutationsgeschwindigkeit.

A Tabellen und Grafiken

Rad Masse	m_r [kg]	1,320
Rad Radius	r_r [m]	0,1225
Rad Abstand	a_r [m]	0,077(2)
Rad Dicke	d_r [m]	0,028
Stab Länge	l_s [m]	0,470(2)

Tabelle 1: Daten der Versuchsanordnung

Gewicht Masse	m_k [kg]	0,060
Radius	$r_s = r_{s,1} = r_{s,2}$ [m]	0,1225

Tabelle 2: Daten zum Physikalischen Pendel

Ausgleichsgewicht Masse	m_g [kg]	0,936
Ausgleichsgewicht Abstand	a_g [m]	0,162(2)
Zusatzgewicht Abstand	r [m]	0,270(2)
Zusatzgewicht 1 Masse	m_1 [kg]	0,020
Zusatzgewicht 2 Masse	m_2 [kg]	0,040
Zusatzgewicht 3 Masse	m_3 [kg]	0,030
Zusatzgewicht 4 Masse	m_4 [kg]	0,010

Tabelle 3: Daten zur Präzessionsmessung

m [g]	ω [s^{-1}]	ω_p [s^{-1}]	β [s^{-2}]	I_x [$kg\,m^2$]
10	70.20	0.04(4)	2.677 ± 0.27	$10.4(3) \cdot 10^{-3}$
	46.54	0.04(4)		
	34.19	0.04(4)		
20	44.25	0.13(3)	5.433 ± 0.09	$10.3(2) \cdot 10^{-3}$
	30.35	0.17(3)		
	21.76	0.26(3)		
	16.56	0.32(3)		
30	67.74	0.13(3)	5.118 ± 1.05	$16.4(15) \cdot 10^{-3}$
	49.28	0.16(3)		
	20.11	0.22(3)		
40	62.06	0.18(3)	10.611 ± 0.23	$10.5(1) \cdot 10^{-3}$
	45.70	0.23(3)		
	34.91	0.30(3)		

Tabelle 4: Rotationsfrequenz und Präzessionsfrequenz in Abhängigkeit vom Gewicht zusammen mit den daraus resultierenden Trägheitsmomenten

ω [s ⁻¹]	σ_ω [s ⁻¹]	ω_n [s ⁻¹]	σ_{ω_n} [s ⁻¹]
80,5	2,6	10,8	0,9
66,7	1,8	9,9	0,7
53,3	1,1	8,4	0,6
43,9	0,8	7,3	0,4
96,7	3,7	13,8	1,5
82,4	2,7	12,9	1,3
72,2	2,0	11,1	1,0
93,0	3,4	13,0	1,4
79,8	2,5	12,3	1,2
67,4	1,8	11,3	1,0

Tabelle 5: Rotationsfrequenz ω und Nutationsfrequenz ω_n

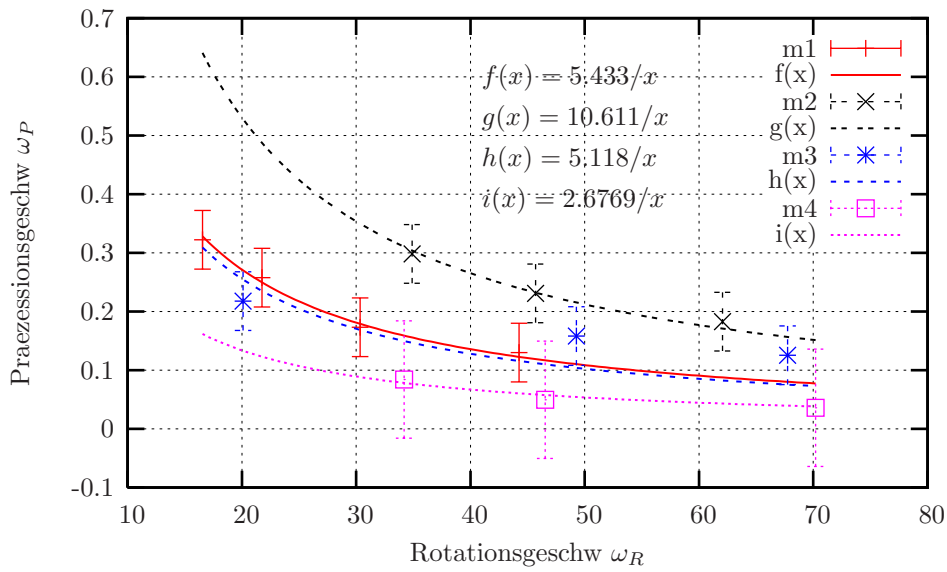
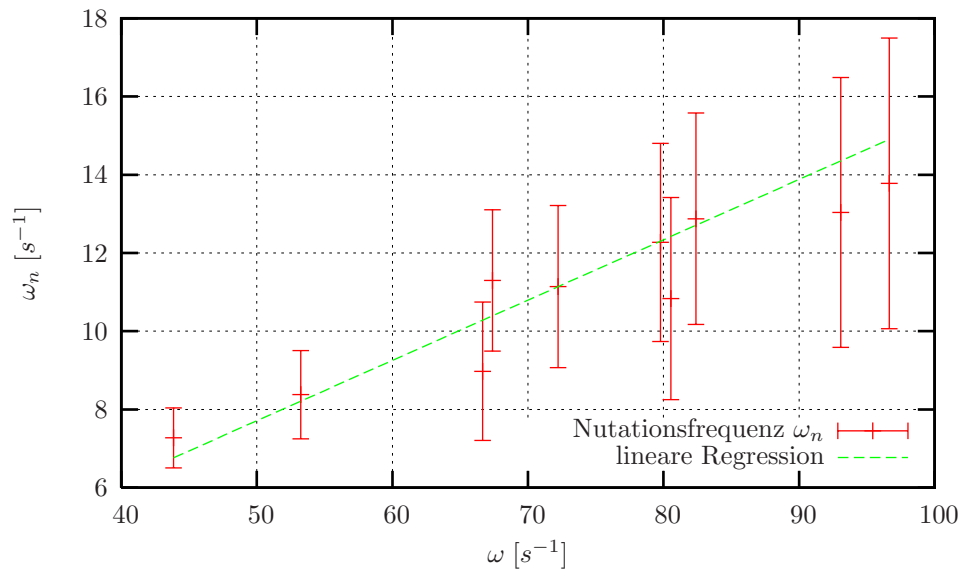


Abbildung 4: Präzessionsfrequenz bei verschiedenen Momenten

Abbildung 5: Nutationsfrequenz ω_n gegen Rotationsfrequenz ω