

Physikalisches A-Praktikum

Versuch 5

Kapillarität und Viskosität

Praktikanten: Nils Kanning
Steffen Klemer
Durchgeführt am: 18.05.2006
Gruppe: 12
Assistent : Marcel Bliem

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Theorie	2
2.1	Intermolekulare Kräfte in Flüssigkeiten	2
2.2	Oberflächenspannung	2
2.2.1	Kapillarität	3
2.2.2	Bestimmung der Oberflächenspannung	5
2.3	Dynamische Viskosität	6
2.3.1	Laminare Strömungen	6
2.3.2	Turbulente Strömungen	6
2.3.3	Die Reynolds'sche Zahl	6
2.3.4	Das Gesetz von Hagen-Poiseuille	6
2.3.5	Bestimmung der Viskosität	8
3	Durchführung	8
3.1	Kapillarität	8
3.2	Innere Reibung	9
4	Auswertung	9
4.1	Oberflächenspannung verschiedener Flüssigkeiten	9
4.2	Viskosität	9
5	Einordnung der Ergebnisse	10
A	Tabellen und Grafiken	12

1 Einleitung

Taucht man ein dünnes Rohr mit einem Ende in ein Wasserglas, so ist der Wasserpegel im Rohr höher als außerhalb. Auf den ersten Blick widerspricht dies unserer Erfahrung mit der Schwerkraft. Bei genauerer Betrachtung lässt sich dieser Effekt, die Kapillarität, jedoch mit der Oberflächenspannung von Wasser, und Flüssigkeiten allgemein, erklären. Dieser Versuch wird zeigen, dass man die Oberflächenspannung auch durch die Kapillarität bestimmen kann.

Eine weitere Eigenschaft von Flüssigkeiten, die in diesem Versuch untersucht werden soll, ist die Viskosität. Diese ist ein Maß für die Zähigkeit einer Flüssigkeit und damit dafür verantwortlich, dass man in Wasser schwimmen kann, in Honig dagegen nur schwer. Auch diese Eigenschaft wird durch einen experimentellen Aufbau bestimmt.

2 Theorie

2.1 Intermolekulare Kräfte in Flüssigkeiten

Beschreibt man die Kräfte innerhalb einer Flüssigkeit auf molekularer Ebene, so sind vornehmlich die *Dipol-Dipol*- sowie die *VAN-DER-WAALS-Wechselwirkung* zwischen den Flüssigkeitsmolekülen von Bedeutung.

Haben die Flüssigkeitsmoleküle ein permanentes Dipolmoment, so treten zwischen ihnen elektrische Kräfte auf. Dieses Phänomen wird als Dipol-Dipol-Wechselwirkung bezeichnet.

Es können jedoch auch bei apolaren Molekülen wechselseitige Kräfte auftreten. Durch die freien Elektronen eines Moleküls kann eine ungleichmäßige Ladungsverteilung innerhalb des Moleküls entstehen. Es bildet sich ein temporärer Dipol. Dieser kann nun ebenfalls ein Dipolmoment bei benachbarten Molekülen induzieren und den Effekt so verstärken. Hierbei spricht man von der *VAN-DER-WAALS-Wechselwirkung*, welche jedoch schwächer als die Dipol-Dipol-Wechselwirkung ist, aber bei ausgedehnten Molekülen eine Rolle spielt.

Allgemein werden Kräfte zwischen den Molekülen einer Flüssigkeit, die für den Zusammenhalt dieser Flüssigkeit sorgen, auch als *Kohäsion* bezeichnet. Analog nennt man die Anziehung zwischen Flüssigkeitsmolekülen und den angrenzenden Molekülen eines anderen Stoffes *Adhäsion*.

2.2 Oberflächenspannung

Im Inneren einer Flüssigkeit wirken auf Grund der Kohäsion von allen Seiten Kräfte auf ein Flüssigkeitsmolekül ein. Hierdurch gibt es jedoch praktisch keine resultierende Gesamtkraft F_r .

Nun betrachten wir ein Molekül an der Oberfläche der Flüssigkeit. Dieses wird nur von den benachbarten Molekülen innerhalb der Flüssigkeit angezogen und es ergibt sich somit eine resultierende Kraft F_r , die ins Innere der Flüssigkeit gerichtet ist (Abb. 1).

Soll nun die Oberfläche der Flüssigkeit um ΔA vergrößert werden, so müssen zusätzliche Moleküle an die Oberfläche gebracht werden. Hierzu muss die Arbeit ΔW verrichtet werden. Wir definieren dabei die *spezifische Oberflächenenergie* ε als:

$$\varepsilon = \frac{\Delta W}{\Delta A} \quad (1)$$

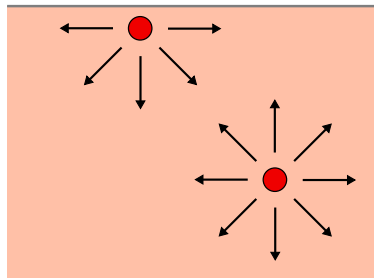


Abbildung 1: Kohäsion an der Flüssigkeitsoberfläche

Weiter betrachten wir eine Oberflächenänderung in eine Richtung um die Strecke Δs . Somit gilt bei einem konstanten Oberflächenrand l die Beziehung $\Delta A = l \Delta s$. Mit Gl. 1 erhalten wir:

$$\Delta W = \varepsilon l \Delta s$$

Nun können wir εl mit einer Kraft F tangential zur Oberfläche identifizieren:

$$\Delta W = F \Delta s$$

Schließlich definieren wir die *Oberflächenspannung* σ als:

$$\sigma = \varepsilon = \frac{F}{l} \quad (2)$$

Folglich ist σ parallel zu Δs und F , also tangential zur Oberfläche der Flüssigkeit.

2.2.1 Kapillarität

Kapillarität ist der Effekt, dass der Flüssigkeitspegel in einer dünnen Kapillaren höher oder tiefer sein kann, als in dem sie umgebenden Becken.

Menisken

Flüssigkeiten in Kapillaren bilden sogenannte Minisken aus. Dies bedeutet, dass der Winkel θ zwischen der Flüssigkeitsoberfläche und der Grenzfläche zwischen Kapillarenwand und Flüssigkeit ungleich 90° ist.

Um dies zu verstehen, verallgemeinern wir zunächst die oben eingeführte Oberflächenspannung σ zu einer Grenzflächenspannung $\sigma_{i,k}$ zwischen den Stoffen i und k . Dabei ist $\sigma_{i,k}$ stets tangential zur Grenzfläche und außerdem so gerichtet, dass die durch $\sigma_{i,k}$ repräsentierte Kraft die Grenzfläche reduziert. Da $\sigma_{i,k} = \varepsilon_{i,k}$ ist in den von uns betrachteten Fällen $\sigma_{i,k} > 0$, da sonst Moleküle die Flüssigkeit unter Zugewinn an Energie verlassen würden.

Im Folgenden wird nun die Kapillarenwand mit k , die Flüssigkeit mit f und die Luft oberhalb der Flüssigkeit mit g bezeichnet. Der Punkt an dem sich alle drei Grenzflächen berühren wird A genannt. Hier herrscht ein Gleichgewicht zwischen den vertikalen Komponenten der $\sigma_{i,k}$:

$$\sigma_{k,f} + \sigma_{f,g} \cos \theta - \sigma_{k,g} = 0$$

Dies bedeutet für θ :

$$\cos \theta = \frac{\sigma_{k,g} - \sigma_{k,f}}{\sigma_{f,g}}$$

Diese Aussage ist jedoch nur für $|\sigma_{k,g} - \sigma_{k,f}| \leq \sigma_{f,g}$ definiert. Wir erhalten zwei mögliche Fälle (Abb. 2). Ist $\sigma_{k,g} > \sigma_{k,f}$, so folgt ein Winkel $\theta < 90^\circ$. Die Flüssigkeitsoberfläche ist somit konkav. Falls $\sigma_{k,g} < \sigma_{k,f}$, so ist $\theta > 90^\circ$ und die Oberfläche ist konvex.

Falls hingegen $\sigma_{k,g} - \sigma_{k,f} > \sigma_{f,g}$, so gibt es stets eine nach oben gerichtete Kraft, welche einen Flüssigkeitsfilm in der Kapillarenwand hoch zieht. In diesem Fall nennt man die Kapillarenwand vollständig benetzt und $\theta = 0^\circ$ (Abb. 2).

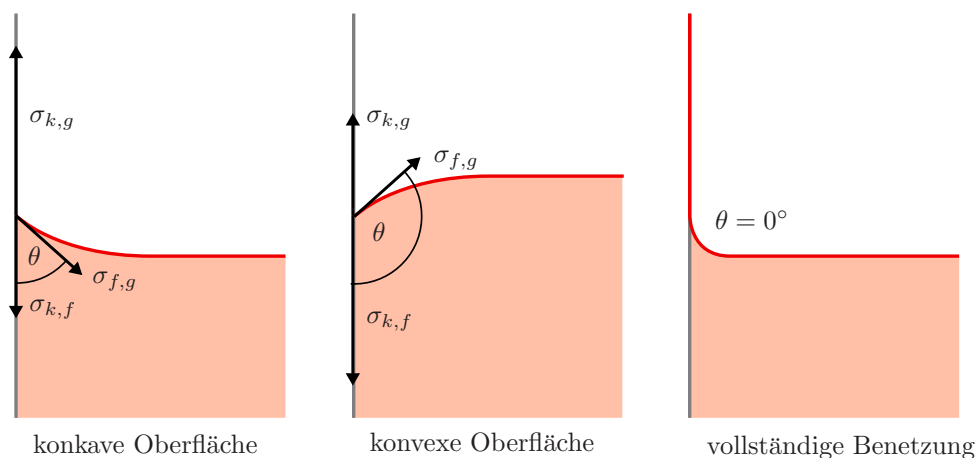


Abbildung 2: Menisken in der Kapillaren

Steighöhe

Um die Steighöhe h einer Flüssigkeitssäule in einer Kapillaren zu bestimmen, verwenden wir lediglich die Oberflächenspannung $\sigma_{f,g}$ zwischen der Flüssigkeit und der Luft. Aus diesem Grund setzen wir nun $\sigma = \sigma_{f,g}$.

Betrachten wir die Definition der Oberflächenspannung (Gl. 2), so ist bei einer runden Kapillaren der Oberflächenrand $l = 2\pi R$, wobei R der Radius der Kapillaren ist. Außerdem ist die Kraft F tangential zur Flüssigkeitsoberfläche am Oberflächenrand. In der Steighöhe der Flüssigkeitssäule h gleicht die vertikale Komponente dieser Kraft der Gewichtskraft der Flüssigkeit in der Säule:

$$m g = F = \sigma l = \sigma 2\pi R \cos \theta$$

Mit der Flüssigkeitsdichte ρ erhalten wir für die Masse m :

$$m = \rho h \pi R^2$$

Damit ergibt sich für die Steighöhe:

$$h = \frac{2 \sigma \cos \theta}{\rho R g} \quad (3)$$

Allgemein findet man bei Winkeln $\theta < 90^\circ$ positive Steighöhen und spricht von *Kapillaraszension*. Dieser Fall tritt zum Beispiel bei Glaskapillaren, die mit Wasser gefüllt und von Luft umgeben sind, auf. Bei Winkeln $\theta > 90^\circ$ stellt sich eine

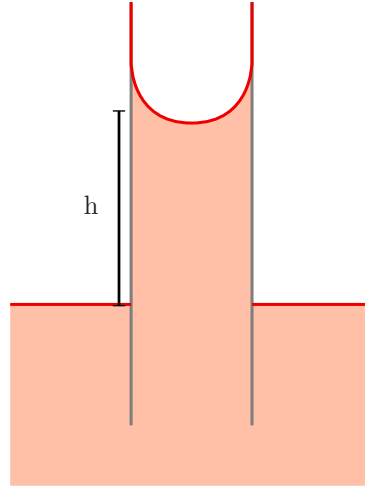


Abbildung 3: Steighöhe in einer Kapillaren

negative Steighöhe ein. Dieses Phänomen nennt man *Kapillardepression* und tritt beispielsweise auf, wenn das Wasser durch Quecksilber ersetzt wird.

Für kleine Winkel θ kann man den Ausdruck nähern:

$$h = \frac{2\sigma}{\rho R g} \quad (4)$$

2.2.2 Bestimmung der Oberflächenspannung

Ist die Dichte einer Flüssigkeit bekannt, kann man aus Gl. 4 somit auch die Oberflächenspannung bestimmen:

$$\sigma = \frac{h g R \rho}{2} \quad (5)$$

Mohrsche Waage

Die MOHRsche Waage dient dazu, die bei diesem Versuch benötigten Dichten der untersuchten Flüssigkeiten zu bestimmen. Sie besteht aus einem in der Mitte gelagerten Arm. Auf beiden Seiten des Arms ist ein Gewicht angebracht. Vor der Messung müssen beide Gewichte durch Verschieben des Lagerungspunktes des Armes ins Gleichgewicht gebracht werden. Danach wird das linke Gewicht in eine Flüssigkeit der Dichte ρ_a gehängt. Durch Zusatzgewichte $m_{a,i}$ auf der linken Seite in den Abständen $r_{a,i}$ von der Lagerung, wird die Waage wieder ins Gleichgewicht gebracht. Danach wird die Waage mit einer Flüssigkeit der Dichte ρ_b erneut durch Zusatzgewichte ins Gleichgewicht gebracht. Dabei gilt nun für das Verhältnis der beiden Dichten:

$$\frac{\rho_a}{\rho_b} = \frac{\sum_i m_{a,i} r_{a,i}}{\sum_i m_{b,i} r_{b,i}} \quad (6)$$

Ist eine der beiden Dichten bekannt, so kann hieraus die zweite bestimmt werden.

2.3 Dynamische Viskosität

Bei *viskosen Flüssigkeiten* tritt Reibung auf Grund von Geschwindigkeitsunterschieden innerhalb der Flüssigkeit, zum Beispiel zwischen benachbarten Flüssigkeitsschichten, auf. Im Gegensatz zu *idealen Flüssigkeiten* ist hier diese Reibung so groß, dass sie nicht vernachlässigt werden kann, sondern charakteristisch für das Verhalten der Flüssigkeiten ist.

2.3.1 Laminare Strömungen

Bei *Laminaren Strömungen* sind die Reibungskräfte groß gegenüber den beschleunigenden Kräften. Dies verhindert eine Vermischung von Flüssigkeitsschichten und führt zu wirbelfreien Stromlinien.

2.3.2 Turbulente Strömungen

Im Gegensatz zu Laminaren Strömungen überwiegen bei *turbulenten Strömungen* die beschleunigenden Kräfte. Es kommt zur Durchmischung der Flüssigkeit und somit zu Wirbeln.

2.3.3 Die Reynolds'sche Zahl

Die REYNOLDS'sche Zahl Re ist eine dimensionslose Größe, die zur Charakterisierung des Strömungsverhaltens einer Flüssigkeit dient. Sie hängt von Eigenschaften wie der Dichte und Viskosität der Flüssigkeit, sowie von der Geometrie des durchströmten Körpers und der Strömungsgeschwindigkeit ab. Ab einem kritischen Wert Re_c geht eine laminare in eine turbulente Strömung über.

2.3.4 Das Gesetz von Hagen-Poiseuille

Das Gesetz von HAGEN-POISEUILLE quantifiziert die Stromstärke I einer laminaren Strömung durch ein Rohr.

Um das Gesetz zu entwickeln, gehen wir von Flüssigkeitsschichten im Abstand dx_{\perp} aus. Diese haben eine Berührungsfläche A . Die Schichten bewegen sich parallel zu A und zwei benachbarte Schichten haben den Geschwindigkeitsunterschied dv_{\parallel} . Die Reibungskraft F_{\parallel} zwischen zwei Schichten lässt sich nun durch die *dynamische Viskosität* η beschreiben:

$$F_{\parallel} = \eta A \frac{dv_{\parallel}}{dx_{\perp}}$$

Nun übertragen wir diesen Zusammenhang auf ein Rohr der Länge L und dem Radius R . Zwischen einem Zylinder mit Radius r innerhalb des Rohres (Abb. 4) und der ihn umgebenden Flüssigkeitsschicht wirkt nun eine Reibungskraft:

$$F_R = \eta A \frac{dv}{dr}$$

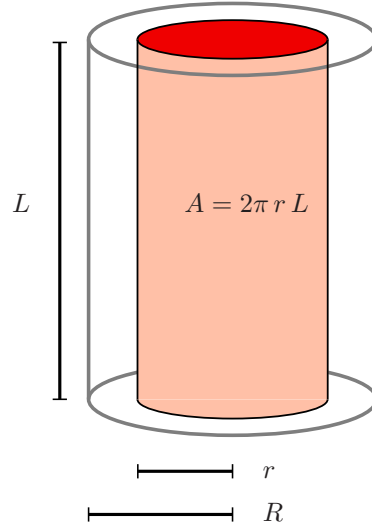


Abbildung 4: Flüssigkeitszylinder in einem Rohr

Dabei ist $A = 2\pi r L$ die Außenfläche des Zylinders. Diese Reibungskraft wirkt der, aus dem Druckunterschied an den Zylinderenden entstehenden, Kraft entgegen:

$$F_R = \eta A \frac{dv}{dr} = -r^2 \pi (p_1 - p_2)$$

Nach Trennung der Variablen und Integration erhalten wir die Geschwindigkeit v , welche aus Symmetriegründen nur vom Radius r abhängen kann:

$$v(r) = -\frac{(p_1 - p_2)}{4L\eta} r^2 + C$$

Da sich der Mantel des Rohres nicht bewegt, das Wasser aber an ihm reibt, kann mit der Bedingung $v(R) = 0$ die Konstante C bestimmt werden:

$$v(r) = -\frac{(p_1 - p_2)}{4L\eta} (R^2 - r^2)$$

Für die Stromstärke $I = dV/dt$ betrachten wir nun das Volumen dV' , welches den Querschnitt eines Hohlzylinders mit Radius r und Wanddicke dr in der Zeit dt durchquert:

$$dV' = 2\pi r dr v dt$$

Nach Integration über r erhalten wir das Volumen dV , welches den Querschnitt des gesamten Rohres in der Zeit dt durchquert:

$$dV = \int_0^R dV' = \frac{\pi R^4 (p_1 - p_2)}{8\eta L} dt$$

Hieraus ergibt sich schließlich das Gesetz von HAGEN-POISEUILLE:

$$I = \frac{dV}{dt} = \frac{\pi R^4 (p_1 - p_2)}{8\eta L} \quad (7)$$

Nun wurden sie in die drei zu untersuchenden Flüssigkeiten getaucht, bis an die Oberfläche herausgezogen und anschließend der Höhenunterschied h_K gemessen. Dies geschah drei mal pro Flüssigkeit. Anschließend haben wir die Dichte ϱ mit Hilfe einer MOHRschen Waage bestimmt. Als Eichflüssigkeit diente Wasser.

3.2 Innere Reibung

Zuerst wurde das Volumen des Glasgefäßes und die Länge l der Kapillaren, sowie die Temperatur T_W des Leitungswassers gemessen. Wir nahmen an, dass unsere Flüssigkeit in den Kapillaren laminar strömt, was aufgrund der bekannten Tabellenwerte vertretbar ist.

Nun konnte die Ausflusszeit t_A des Wassers für insgesamt drei verschiedene Kapillaren ermittelt werden.

Abschließend wurden für 10 verschiedene Füllhöhen die Ausflusszeiten durch die kleinste Kapillare bestimmt.

4 Auswertung

4.1 Oberflächenspannung verschiedener Flüssigkeiten

Die Werte der Dichtemessung sind in Tab. 2 aufgeführt. Es wurde bei dem Abstand der Zusatzgewichte der MOHRschen Waage ein Fehler von $\sigma_r = 0,1 \text{ cm}$ angenommen. Dank Gl. 6 und dem Wissen um die Dichte von destilliertem Wasser $\varrho_{H_2O} = 1 \text{ g/cm}^3$ ergeben sich die dort aufgeführten Dichten.

Mit Hilfe der gemessenen Steighöhen in Tab. 4 sowie Gl. 5 kann nun die Oberflächenspannung des Wassers, Methanols und Ethylenglykols bestimmt werden. Die 3 Messwerte für die Höhe wurden gemittelt und anschließend Werte für σ für jede Kapillare und Flüssigkeit bestimmt. Die so erhaltenen Werte sind gemittelt:

$$\begin{aligned}\sigma_{H_2O} &= 72(3) \cdot 10^{-3} \text{ J/m}^2 \\ \sigma_{CH_3OH} &= 24(2) \cdot 10^{-3} \text{ J/m}^2 \\ \sigma_{C_2H_4(OH)_2} &= 49(3) \cdot 10^{-3} \text{ J/m}^2\end{aligned}$$

In die Fehlerrechnung gingen der Fehler in der Bestimmung der Steighöhe sowie des Kapillarradius in gleichen Teilen ein.

4.2 Viskosität

In der ersten Messung mit den verschiedenen Kapillaren ergaben sich zusammen mit Gl. 3 die Werte in Tab. 3. Dabei war die ursprüngliche Höhe der Wassersäule $h = 0,5 \text{ m}$, die Höhe des ausgeflossenen Volumens $\Delta h_A = 0,05 \text{ m}$ und der Radius der Wassersäule $r = 0,0115 \text{ m}$. Damit ergibt sich nun durch Mittelwertbildung:

$$\eta = 1,4(5) \text{ mPa s}$$

Das Ergebnis der zweiten Messung ist in Abb. 6 zu sehen. Hierbei wurde die Füllhöhe h halblogarithmisch gegen die gemessene Ausflusszeit t aufgetragen. Es ist deutlich der sich aus Gl. 9 ergebende lineare Zusammenhang erkennbar. Als Ausflusszeit t

wurde die Zeit angenommen, die benötigt wurde bis der Wasserpegel von der Höhe h auf die Höhe $7,5\text{ cm}$ gesunken ist. Dieses Verfahren ist zulässig, da der erwartete Zusammenhang linear ist.

Da für die Regression die Gerade $t = \beta \log(h) + c$ verwendet wurde, entspricht die Proportionalitätskonstante β theoretisch dem Wert:

$$\frac{1}{\beta} = \frac{\pi R^4 \rho g}{8 \eta L \pi r^2}$$

Durch die Regression ergibt sich β zu:

$$\beta = 401(1)\text{ s}$$

Mit der Länge der Kapillaren $L = 0,231\text{ m}$, deren Radius $R = 0,49 \cdot 10^{-3}\text{ m}$ und dem Radius der Wassersäule $r = 0,0115\text{ m}$ erhalten wir für die Viskosität η von Wasser bei einer Wassertemperatur von 22°C :

$$\eta = 0,93(17)\text{ mPa s}$$

5 Einordnung der Ergebnisse

Da die Bestimmung der Dichten und Oberflächenspannungen gut funktionierte, die Werte aber doch recht abstrakt sind, haben wir für letztere ein paar Literaturwerte² herausgesucht. Und tatsächlich liegen wir im Rahmen der ermittelten Fehler erstaunlich nahe bei diesen. Betrachtet man die Schwierigkeiten beim Ablesen der Steighöhen und die vergleichsweise simple Methode der Dichtebestimmung, so ist der geringe Fehlerwert ein kleines Erfolgserlebnis.

	Literaturwert	Gemessener Wert	Verhältnis
σ_{H_2O}	$71,99 \cdot 10^{-3}\text{ J/m}^2$	$72(3) \cdot 10^{-3}\text{ J/m}^2$	99,9%
σ_{CH_3OH}	$22,07 \cdot 10^{-3}\text{ J/m}^2$	$24(2) \cdot 10^{-3}\text{ J/m}^2$	91,9%
$\sigma_{C_2H_4(OH)_2}$	$49,99 \cdot 10^{-3}\text{ J/m}^2$	$49(3) \cdot 10^{-3}\text{ J/m}^2$	102,0%
η_{H_2O}	$0,890\text{ mPa s}$	$0,93(17)\text{ mPa s}$	95,6%

Tabelle 1: Vergleich unserer Werte mit Tabellenwerten für 25°C

Bei der Viskositätsbestimmung fällt ein Unterschied zwischen der Genauigkeit der beiden Messverfahren auf. Der errechnete Fehler bei der Bestimmung auf Grund des logarithmischen Zusammenhangs ist um den Faktor 2 bis 4 geringer als der bei der ersten Messung. Dabei wurde bei der ersten Art der Viskositätsbestimmung der Fehler auf Grund der gemittelten Druckdifferenz Δp noch außer Acht gelassen. Somit fällt der Vergleich der beiden Messverfahren noch deutlicher für das zweite von uns verwendete Verfahren aus. Aus diesem Anlass wird in Tab. 1 auch nur dieser Wert aufgeführt.

Erfreulich ist, dass alle errechneten Viskositätswerte in der Größenordnung des Literaturwerts liegen. Nur bei der Kapillaren mit dem größten Radius (grün) liegt der

²Boca Raton, Fla. [u.a.], Taylor and Francis: CRC handbook of chemistry and physics : a ready-reference book of chemical and physical data, Ausgabe 85, 2004

Literaturwert nicht im Fehlerbereich. Diese Abweichung lässt sich darauf zurückführen, dass bei dieser Kapillaren die Ausflusszeit relativ gering ist und diese sich somit nicht so genau bestimmen ließ.

Beim Vergleich unserer Viskositätswerte mit dem in Tab. 1 aufgeführten Literaturwert ist außerdem zu beachten, dass wir kein destilliertes sondern Leitungswasser verwendet haben und die Wassertemperatur nicht $25^{\circ}C$ sondern $22^{\circ}C$ betrug.

A Tabellen und Grafiken

Flüssigkeit	Dichte [g/cm^3]
Wasser (normiert)	1
Methanol	0,85 (2)
Ethylenglykol	1,11 (2)

Tabelle 2: Die berechneten Dichten der verwendeten Flüssigkeiten

Kapillare	Länge l [cm]	Radius R [mm]	Ausflusszeit t_A [s]	Viskosität η [mPa · s]
rot	23,1 (2)	0,49 (1)	42,2 (2)	0,9 (4)
grün	22,8 (2)	0,94 (1)	6,6 (2)	1,9 (7)
blau	23,0 (2)	0,62 (1)	22,0 (2)	1,2 (5)

Tabelle 3: Ausflusszeit und Viskosität des destillierten Wassers bei verschiedenen Kapillaren und einer Wassertemperatur von $22^\circ C$

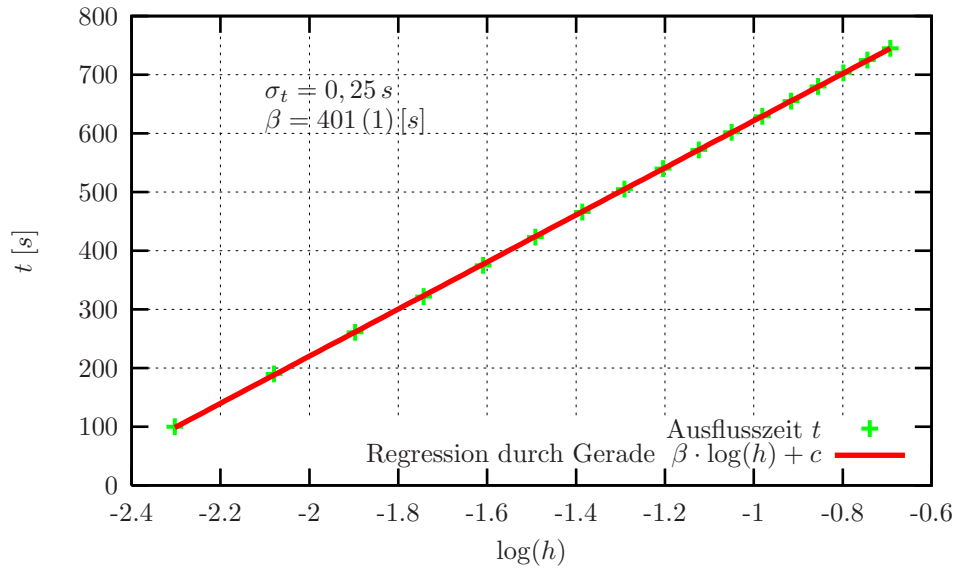


Abbildung 6: Die gemessene Ausflusszeit t des destillierten Wassers gegen die halb-logarithmisch aufgetragene Füllhöhe h

Flüssigkeit	Kapillare	h [cm]	\bar{h} [cm]	σ_i [$10^{-3} J/m^2$]
Wasser	blau	2,5	2,47	72,5
		2,4		
		2,5		
	Grün	1,5	1,5	69,0
		1,5		
		1,5		
Rot	2,8	2,8	74,2	
	2,8			
	2,8			
Methanol	Blau	1,0	1,03	26,8
		1,0		
		1,1		
	Grün	0,5	0,533	20,8
		0,5		
		0,6		
Rot	1,1	1,13	25,5	
	1,2			
	1,1			
Ethylenglykol	Blau	1,5	1,53	51,9
		1,5		
		1,5		
	Grün	0,9	0,9	45,9
		0,8		
		1,0		
Rot	1,7	1,63	48,0	
	1,6			
	1,6			

Tabelle 4: Die verschiedenen Steighöhen h (auf 0,2cm genau) bei unterschiedlichen Kapillaren und Flüssigkeiten