

Physikalisches A-Praktikum

Versuch 9

Diffusion

Praktikanten: Nils Kanning
Steffen Klemer
Durchgeföhrt am: 22.06.2006
Gruppe: 12
Assistent: Thomas Koepe

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
2	Theorie	4
2.1	Erklärung der Diffusion	4
2.1.1	Brownsche Bewegung	4
2.1.2	Transportvorgänge	4
2.1.3	Diffusion	6
2.2	Benötigte Hilfsmittel	7
2.2.1	Fotowiderstand	7
2.2.2	Wheatstonesche Brückenschaltung	8
3	Durchführung	9
3.1	Messung 1	9
3.2	Messung 2	9
4	Auswertung	10
4.1	Qualitative Interpretation	10
4.2	Ermittlung des Diffusionskoeffizienten	10
4.3	Konzentrationsprofile	11
5	Einordnung der Ergebnisse	12
A	Tabellen und Grafiken	13

1 Einleitung

In diesem Versuch wird das Phänomen der Diffusion untersucht. Dabei handelt es sich um einen Transportvorgang, der eine räumliche Inhomogenität der Teilchendichte eines Stoffes ausgleicht. Als Beispiel wird die Diffusion des Farbstoffes Methylenblau in Wasser untersucht. Dabei wird experimentell die orts- und zeitabhängige Konzentration dieses Farbstoffs im Wasser bestimmt und hieraus eine für den Versuchsaufbau charakteristische Konstante – der Diffusionskoeffizient D – berechnet.

2 Theorie

2.1 Erklärung der Diffusion

2.1.1 Brownsche Bewegung

Bevor wir uns Transportvorgängen im Allgemeinen und der Diffusion im Speziellen zuwenden können, ist es zunächst nötig das Zustandekommen von Bewegungen einzelner Teilchen eines Mediums zu erläutern.

Hierzu bedienen wir uns der kinetischen Gastheorie und betrachten als erstes die Bewegung einzelner Moleküle in einem Gas. Dieses Gas hat eine gewisse Temperatur und somit besitzen die Moleküle eine, von dieser abhängige, Durchschnittsgeschwindigkeit. Nun betrachten wir ein Molekül des Gases. Dieses bewegt sich zunächst in eine Richtung. Findet ein Stoß mit einem anderen Molekül statt, so ändert sich die Bewegungsrichtung zufällig. Dabei entsteht eine regellose Bewegung des Teilchens.

Diese hier für Gase erläuterte Eigenbewegung der Moleküle tritt auch in Flüssigkeiten auf und wird nach dem Botaniker ROBERT BROWN als BROWNSche Bewegung bezeichnet.

2.1.2 Transportvorgänge

Auch in diesem Abschnitt bedienen wir uns zunächst wieder der Begriffe der kinetischen Gastheorie und betrachten zunächst ein Gas. Wir schreiben nun jedem Molekül dieses Gases eine Ladung g zu. Den genauen Charakter dieser Ladung werden wir später in Abhängigkeit des konkret untersuchten Transportvorganges angeben.

Transportvorgänge treten nun immer dann auf, wenn diese Ladung makroskopisch inhomogen verteilt ist. Dann führt die regellose BROWNSCHE BEWEGUNG zu einem Ausgleich der Inhomogenität.

Um diesen Zusammenhang quantitativ zu fassen, führen wir zunächst eine Ladungsdichte ρ_g ein:

$$\rho_g(\vec{x}, t) = n(\vec{x}, t) g(\vec{x}, t)$$

Dabei ist n die Anzahldichte, und g die mittlere Ladung in Abhängigkeit vom Ort \vec{x} und der Zeit t .

Weiter definieren wir eine Stromdichte \vec{j}_g :

$$\vec{j}_g(\vec{x}, t) = \rho_g(\vec{x}, t) \vec{v}(\vec{x}, t)$$

Hier ist \vec{v} die makroskopische Geschwindigkeit der Moleküle in Abhängigkeit vom Ort \vec{x} und der Zeit t .

Mit Hilfe dieser Größen betrachtet man nun eine Querschnittsfläche, welche einen Ort geringer Ladungsdichte von einem hoher Ladungsdichte abgrenzt. Wie oben bereits erwähnt, kommt es zu einem Ladungsstrom durch diese Fläche, der genauer analysiert werden muss. Man konzentriert sich auf einen kleinen Bereich um diesen Querschnitt herum und nimmt weiter an, dass die Teilchen, die die Querschnittsfläche durchqueren, sich in diesem Bereich geradlinig bewegen. Auf diese Weise kann man die Stromdichte in Abhängigkeit der Geschwindigkeit und der Richtung, mit der die Teilchen die Querschnittsfläche passieren, bestimmen. Mittelt man die so erhaltenen Stromdichten über alle auftretenden Geschwindigkeiten und Winkel, so gelangt man zu der, auch unabhängig von Gasen, physikalisch gehaltvollen Aussage:

$$\vec{j}_g(\vec{x}, t) = -D \vec{\nabla} \varrho_g(\vec{x}, t) \quad (1)$$

Die Größe D ist dabei eine materialspezifische Konstante.

Um uns die obige Relation zu veranschaulichen, betrachten wir beispielhaft einen Ort \vec{x} mit einer im Vergleich zur Umgebung geringeren Ladungsdichte ϱ_g . In diesem Fall zeigt der Gradient $\vec{\nabla} \varrho_g(\vec{y}, t)$, wobei \vec{y} aus einer Umgebung um \vec{x} ist, von \vec{x} weg. Das heißt die Stromdichte \vec{j}_g ist stets zu dem durch \vec{x} definierten Ort gerichtet und es kommt zu einem Ladungsstrom, welcher der beschriebenen Inhomogenität von ϱ_g entgegenwirkt.

An dieser Stelle fügt man der bisherigen Theorie die Annahme hinzu, dass die Summe aller Teilchenladungen g konstant ist. Als physikalische Konsequenz dieser Annahme erhalten wir die Tatsache, dass sich nun die Ladungsdichte ϱ_g nicht ohne einen Ladungsstrom ändern kann. Es können also keine Ladungen erzeugt oder vernichtet werden. Mathematisch drücken wir dies durch eine Kontinuitätsgleichung aus:

$$\frac{\partial \varrho_g(\vec{x}, t)}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_g(\vec{x}, t)$$

Zusammen mit Gl. 1 erhalten wir so die Transportgleichung:

$$\frac{\partial \varrho_g(\vec{x}, t)}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot (-D \vec{\nabla} \varrho_g(\vec{x}, t)) = D \underline{\Delta} \varrho_g(\vec{x}, t)$$

An dieser Stelle werden wir nun konkrete Ladungen g diskutieren. Wir gehen dabei von einer konstanten Anzahldichte $n(\vec{x}, t) = n$ aus.

Wärmeleitung Zunächst wählen wir:

$$g = \frac{c_{V,mol}}{N_A} T(\vec{x}, t)$$

Die Ladung eines Teilchens ist damit seine thermische Energie, also der regellose Anteil der kinetischen Energie. Wir nennen nun die Stromdichte Energiestromdichte $\vec{q} = \vec{j}_g$ und bezeichnen $\kappa = D$ als Temperaturleitfähigkeit. Weiter führen wir die Wärmeleitungs-konstante $\lambda = n \kappa c_{V,mol} / N_A$ ein. Hiermit erhalten wir aus Gl. 1 und Gl. 2 die Wärmeleitungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \vec{q}(\vec{x}, t) &= -\lambda \vec{\nabla} T(\vec{x}, t) \\ \frac{\partial T(\vec{x}, t)}{\partial t} &= \kappa \underline{\Delta} T(\vec{x}, t) \end{aligned}$$

Innere Reibung Betrachtet man das Geschwindigkeits-Profil einer Strömung in z -Richtung und wählt $g = mv_z$ den Impuls eines Teilchens in z -Richtung, so erhält man mit Gl. 1 den pro Fläche und Zeit zwischen zwei Schichten des Profils übertragenen Impuls:

$$j_g(x, z) = -Dnm \frac{\partial v_z}{\partial x}$$

Nun definiert man die Viskosität als $\eta = Dnm$. Bei einer Berührungsfläche A der Schichten des Flüssigkeitsprofils erhalten wir so die Kraft der inneren Reibung:

$$F_R = -\eta A \frac{\partial v_z}{\partial x}$$

Elektrischer Strom Als letztes betrachten wir die Träger elektrischer Ladungen q in einem Leiter der Querschnittsfläche A . Dann wählen wir als Ladung die elektrische Ladung q . Auf diese Weise können wir den Strom I durch den Querschnitt A berechnen:

$$I = \int_A j_q dA$$

2.1.3 Diffusion

Auch die Diffusion ist ein Transportvorgang, der durch die, im vorherigen Abschnitt diskutierten, Gleichungen Gl. 1 und Gl. 2 beschrieben werden kann.

Im Falle der Diffusion schreiben wir jedem Teilchen die konstante Ladung $g = 1$ zu. Dafür ist nun jedoch die Anzahldichte $n(\vec{x}, t)$ veränderlich. Dies bedeutet, die betrachteten Teilchen liegen in einem Medium in einer ort- und zeitabhängigen Konzentration $c(\vec{x}, t)$ vor. Nun kann eine makroskopische Inhomogenität der Ladungsverteilung nur noch aus einer inhomogenen Konzentration entstehen. Somit führt der oben diskutierte Mechanismus zum Ausgleich der Inhomogenität der Ladungsverteilung zwangsläufig zu einer, im gesamten Medium konstanten, Konzentration.

Im Fall der Diffusion bezeichnet man Gl. 1 auch als 1. FICKSches Gesetz:

$$\vec{j}(\vec{x}, t) = -D \vec{\nabla} c(\vec{x}, t) \quad (2)$$

Analog erhält man aus Gl. 2 das 2. FICKSche Gesetz:

$$\frac{\partial c(\vec{x}, t)}{\partial t} = D \Delta c(\vec{x}, t)$$

Dabei ist D der Diffusionskoeffizient. Dieser ist, wie oben bereits erwähnt, materialspezifisch.

Spezielle Lösung des 2. Fickschen Gesetz In diesem Versuch soll untersucht werden, wie eine zunächst oberhalb eines Mediums plazierte, Flüssigkeitsschicht (Methylenblau) in dieses Medium (Wasser) hineindiffundiert. Wir wählen nun ein Koordinatensystem in dem die Oberfläche des Mediums die x -Koordinate 0 hat. Die x -Koordinate nimmt nach unten, also im Medium, zu. Außerdem ist die Konzentration der hineindiffundierenden Flüssigkeit $c(x, y, z, t)$ auf einer y - z -Ebene konstant. Somit können wir $c(x, y, z, t)$ zu $c(x, t)$ vereinfachen. An dieser Stelle fließt nun die Anfangskonzentration in den Gedankengang ein. Dabei befindet sich die

Flüssigkeitsschicht zunächst nur oberhalb des Mediums und dort in einer örtlich konstanten Konzentration c_0 . Daraus ergeben sich zwei Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} c(x, 0) &= c_0 & \text{falls } x \leq 0 \\ c(x, 0) &= 0 & \text{falls } x > 0 \end{aligned}$$

Das 2. FICKSche Gesetz ist eine partielle Differentialgleichung. Zu deren Lösung überführt man diese durch eine Fouriertransformation in eine lineare Differentialgleichung, deren Lösung bestimmt werden kann. Nach der Rücktransformation ergibt sich mit den oben geschilderten Anfangsbedingungen die Lösung:

$$c(x, t) = \frac{c_0}{2} \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right) \right) \quad (3)$$

Dabei ist erf die GAUSSSche Fehlerfunktion:

$$\operatorname{erf}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \exp(-v^2) dv \quad (4)$$

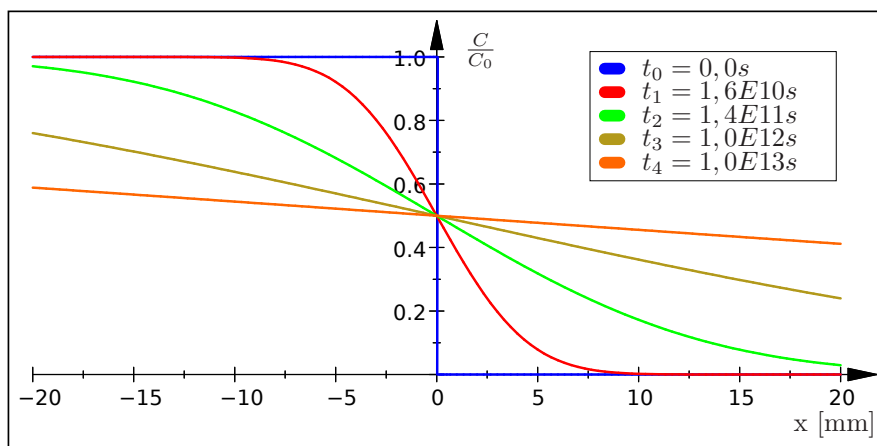


Abbildung 1: Die spezielle Lösung des 2. Fickschen Gesetzes für einige Zeiten t

In Abb. 1 sind die Graphen für einige feste Zeiten aufgetragen. Es ist deutlich der sich immer weiter abflachende Verlauf vom unstetigen Bruch bei $t = 0$ bis zur fast linearen Verteilung bei großen Zeiten zu sehen. Die Kurven nähern sich hierbei einer gleichmäßigen Verteilung von $C_0/2$ an.

2.2 Benötigte Hilfsmittel

2.2.1 Fotowiderstand

Um die relative Konzentration des Methylenblau im Wasser zu bestimmen, wird in diesem Versuch ein Fotowiderstand verwendet.

Mit diesem wird die Intensität von Licht, welches die Mischung des Methylenblau mit Wasser durchquert, gemessen.

Aus diesem Grund wird an dieser Stelle die Funktionsweise eines Fotowiderstands erläutert. Ein Fotowiderstand besteht aus einem Halbleiter. In diesem stehen zunächst nur wenige freie Elektronen zum Ladungstransport zur Verfügung. Somit

ist der elektrische Widerstand relativ hoch. Bestrahlt man diesen Halbleiter mit ausreichend energiereichem Licht, so werden die Elektronen im Halbleiter angeregt und dadurch aus den Atomen geschlagen um nun zur Leitung zur Verfügung zu stehen. Dadurch verringert sich der Widerstand des Halbleiters. Erhöht man nun die Intensität des Lichts, so werden mehr Atome angeregt und der Widerstand noch weiter reduziert.

2.2.2 Wheatstonesche Brückenschaltung

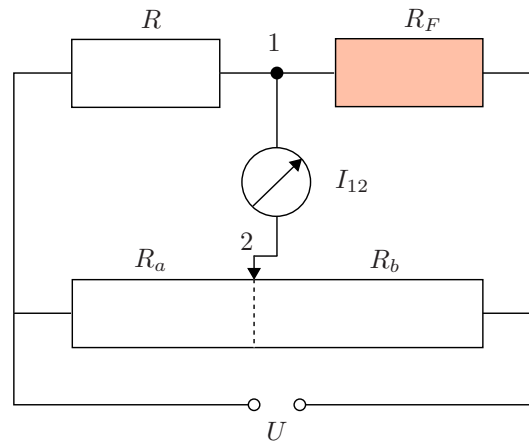


Abbildung 2: WHEATSTONESche Brückenschaltung zur Bestimmung von R_F

Um den Wert des oben beschriebenen Fotowiderstands R_F möglichst genau vergleichen zu können, verwenden wir eine WHEATSTONESche Brückenschaltung. Der schematische Aufbau dieser Schaltung in der in diesem Versuch verwendeten Form ist in Abb. 2 dargestellt. Es wird also neben dem zu bestimmenden Widerstand R_F auch ein Konstanter Widerstand R und ein Potentiometer benötigt. Dabei ist das Potentiometer durch die beiden gegeneinander variierbaren Widerstände R_a und R_b symbolisiert.

Zur Messung des Widerstands R_F muss die Schaltung nun abgeglichen werden. Dies bedeutet, das Potentiometer wird so eingestellt, dass kein Strom I_{12} zwischen den ebenfalls in Abb. 2 zu sehenden Punkten 1 und 2 fließt. Somit besteht zwischen diesen beiden Punkten keine Potentialdifferenz. Das bedeutet wiederum, dass über R und R_a dieselbe Spannung abfallen muss. Gleiches gilt für R_F und R_b . Damit ergeben sich die Relationen:

$$\begin{aligned} I_1 R &= I_2 R_a \\ I_1 R_F &= I_2 R_b \end{aligned}$$

Der gesuchte Widerstand R_F kann so bestimmt werden:

$$R_F = R \frac{R_b}{R_a}$$

Dieses Messverfahren hat gegenüber der normalen Messung der am Widerstand R_F abfallenden Spannung und des durch ihn fließenden Stroms den Vorteil, dass keine Innenwiderstände der Messgeräte die Messwerte beeinträchtigen. Da mit einem Strommessgerät noch sehr kleine Ströme gemessen werden können, ist der durchzuführende Abgleich der Brückenschaltung sehr genau möglich und somit kann auch der gesuchte Widerstand R_F sehr genau bestimmt werden.

Die Bestimmung von Widerständen mit diesem Verfahren wird auch als stromloses Messen bezeichnet.

3 Durchführung

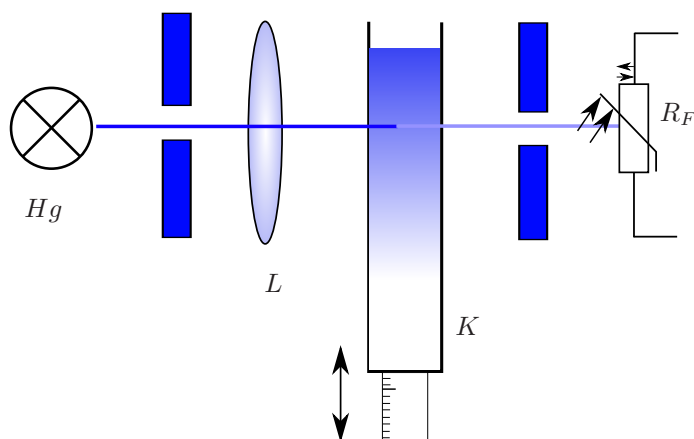


Abbildung 3: Schema des Versuchsaufbaus

Wie bereits in der Theorie erwähnt wurde, messen wir die Diffusion von Methylenblau ($C_{16}H_{18}ClSN_3$) in Wasser. Wir überschichten hierbei beide Flüssigkeiten in einer Glasküvette (K), wobei das Methylenblau oben ist. Nun montieren wir das Gefäß auf einer höhenverstellbaren Halterung und beleuchten es mit einer Quecksilberdampfampe (Hg) durch einen schmalen Spalt. Mit Hilfe einer Linse (L) wird der Strahl schließlich auf einen Fotowiderstand (R_F) fokussiert.

Für eine leichte Abgleichbarkeit ist dieser in eine WHEATSTON'sche Brücke geschaltet, die mit Hilfe eines Potentiometers angepasst werden kann. Außerdem besteht die Möglichkeit, Graufilter im Strahlengang zu installieren.

Zuerst wurde, noch ohne Küvette, der Widerstand des Fotowiderstandes gemessen und die Messbrücke so abgestimmt, dass mit dem Potentiometer alle Konzentrationen vermessen werden konnten.

3.1 Messung 1

Hierfür wurde zuerst die Widerstandsbrücke auf einen $c_0/16$ Filter abgeglichen, dann die Küvette zu $3/4$ mit Wasser und darüber mit Methylenblau der Konzentration c_0 geschichtet. Anschließend konnte 30 min lang alle 30 s der Ort der Konzentration $c_0/16$ bestimmt werden.

Nach insgesamt 100min Diffusionszeit wurde, in einer als konstant angenommenen, Zeit, die Position der Konzentrationen $\{1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32\} \cdot c_0$ bestimmt. Diese Messung wurde zweimal durchgeführt - in Richtung steigender und fallender Konzentration.

3.2 Messung 2

Die Messung verlief völlig analog zur ersten, mit dem Unterschied, dass vorher auf einen $C_0/32$ Filter abgeglichen und die Konzentrationsverteilung bereits nach 40min

vermessen wurde.

4 Auswertung

4.1 Qualitative Interpretation

Im jeweils ersten Teil der Messung sind wir bei einer festen Konzentration durch die Abb. 1 (siehe Theorieteil) gelaufen. Dabei schneiden wir die dort gezeichneten Graphen fester Zeiten bei verschiedenen Strecken x . Wir bewegen uns auf einer Geraden parallel zur Abszisse. Im jeweils 2. Teil dagegen, haben wir ein Konzentrationsprofil, also einen Graphen diskreter Zeit aufgenommen.

4.2 Ermittlung des Diffusionskoeffizienten

Mit der Relation 3 ist es uns möglich, für eine feste Konzentration C , eine Relation zwischen der Diffusionsstrecke und der Zeit anzugeben. Dazu betrachten wir zunächst Messung 1. Hier galt $C = C_0/16$ und damit

$$\begin{aligned}\frac{1}{16} &= \frac{1}{2} \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right) \right) \\ \Rightarrow \frac{7}{8} &= \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right)\end{aligned}$$

Geben wir dies in ein Computeralgebrasystem ein, in unserem Fall MuPAD¹, so ergibt sich durch eine numerische Berechnung das Argument der erf-Funktion:

$$\begin{aligned}1,0848 &= \frac{x}{\sqrt{4Dt}} \\ \Rightarrow x^2 &= 1,0484^2 \cdot 4Dt \\ x^2 &= 4,7072D \cdot t\end{aligned}$$

Bevor der so gefundene Zusammenhang zur Bestimmung des Diffusionskoeffizienten D ausgenutzt werden kann, müssen die gemessenen Längen x' angepasst werden. Wir subtrahieren von jedem Messwert den Wert zur Zeit $t = 0$ s und erhalten so die, für die Auswertung relevanten Größen x :

$$x(t) = x'(t) - x'(0 \text{ s}) \quad (5)$$

Trägt man nun x^2 gegen t (Tab. 1) auf, und fittet es linear, so bekommt man, wie in Abb. 4 zu sehen, als Anstieg der Geraden m :

$$\begin{aligned}m &= 1,25(4) 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s} \text{ und damit} \\ D &= \frac{m}{4,7072} \\ D &= 2,65(9) 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}\end{aligned}$$

Völlig analog ergeben sich für Messung 2 (Tab. 2) mit $C = C_0/32$

$$\begin{aligned}\frac{15}{16} &= \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right) \\ x^2 &= 6,9401D \cdot t\end{aligned}$$

¹MuPAD Pro 3.2.0 SciFace Software GmbH, 2005

sowie die Abb. 5 und damit:

$$\begin{aligned} m &= 4,4(2) 10^{-9} m^2/s \\ D &= 6,3(3) 10^{-10} m^2/s \end{aligned}$$

Bei der Bestimmung des Fehlers der Steigung der Regressionsgeraden m wurde lediglich der Ablesefehler der x berücksichtigt. Dieser wurde mit $\sigma_x = 0,01mm$ angenommen. Benötigt wurde dann der Fehler σ_{x^2} , welcher sich durch die Fehlerfortpflanzung ergibt:

$$\sigma_{x^2} = 2x \sigma_x ,$$

Hierbei wurde angenommen, dass die Zeitmessung exakt ist. Diese Annahme erscheint auf Grund der langsam ablaufenden Diffusion realistisch. Bei der Bestimmung der Diffusionskoeffizienten D ging dann der Fehler von m über die Fehlerfortpflanzung ein.

Über das gewichtete Mittel verknüpft, erhalten wir schließlich aus den beiden zuvor bestimmten Werten:

$$\bar{D} = 2,95(9) 10^{-10} m^2/s$$

4.3 Konzentrationsprofile

Aus den 2. Teilen der Messung bekommen wir $C/C_0(x)$. Beide Kurven der Messung nach etwa 100 Minuten sind in Abb. 6 aufgetragen, die beiden der Messung nach etwa 40 Minuten in Abb 7. Die Messwerte mussten hierfür erst normalisiert werden. Dazu wurde je der Mittelwert der beiden $C_0/2$ Messungen genommen und von allen Werten abgezogen, da der theoretisch vermutete Nullpunkt bei eben diesem Wert liegt. Die Ergebnisse sind in Tab. 3 zu sehen. Betrachten wir wieder Gl. 3 und stellen sie diesmal nach C/C_0 um, so können wir für t die entsprechenden Werte und für D das soeben bestimmte \bar{D} einsetzen. Damit ergibt sich

$$\frac{c(x, t)}{c_0} = \frac{1}{2} \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right) \right)$$

das für die jeweiligen t ebenfalls in die Abbildung eingetragen wurde. Als Zeitpunkt einer auf- bzw. absteigenden Messung wurde die Hälfte der Messzeit angenommen. Nun ist schon in den beiden jeweiligen Graphen zu sehen, dass der gemachte Fehler sehr klein ist - sie sind kaum zu unterscheiden. Setzt man x und D ohne Fehler voraus und berechnet für die erste Messung bei 40 Minuten² mit dem Gesetz der Fehlerfortpflanzung und einem $\sigma_{t_{40}} = 2min$ den Fehler von C/C_0 für ein mittleres x , so erhält man den maximalen Fehler

$$\begin{aligned} \sigma_{C_t} &= \frac{\partial C/C_0}{\partial t} \cdot 120 \\ \sigma_{C_t} &= 5 \cdot 10^{-4}, \end{aligned}$$

welcher für Werte in der Größenordnung von $1/4$ nicht ins Gewicht fällt, da mit einer analogen Rechnung durch σ_x und σ_D verursachte Fehler die gleiche Größenordnung

$$\begin{aligned} \sigma_{C_x} &= 1 \cdot 10^{-4} \\ \sigma_{C_D} &= 5 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

²Es muss bei der kleinsten Zeit liegen, da diese invers exponentiell eingeht. Es ist auch gut in den Diagrammen zu sehen.

haben. Mit diesen Fehlergrößenordnungen im Kopf sollten auch die Diagramme betrachtet werden. Da hieraus nur qualitative Größenordnungen entnommen werden, macht es auch wenig Sinn, getrennte Fehlerrechnungen zu machen, müssen sie doch auf Grund ähnlicher Ausgangswerte alle in der gleichen Zehnerpotenz liegen.

5 Einordnung der Ergebnisse

Die Bestimmung des Diffusionskoeffizienten D liefert zwei Werte, deren Fehlerintervalle sich nicht überlappen. Trotz dieser Abweichung liegen beide Werte in derselben Größenordnung und exaktere Messwerte sind mit der gegebenen Versuchsanordnung nur schwer zu erzielen. Ein Problem bei der Messung war, dass schon leichte Erschütterungen die Messwerte deutlich verfälschten. Dies ist z.B. in Abb. 4 zu erkennen. Nach einer Zeit von etwa 600 s fallen die Messwerte um einen kleinen Betrag, was nicht mit der theoretischen Erklärung der Diffusion verstanden werden kann.

Eine weitere Schwierigkeit wurde bei der Auswertung der zweiten Messreihe deutlich und ist in Abb. 5 zu erkennen. Hier weichen die Messwerte bei großen Zeiten deutlich von der Regressiongeraden ab. Eine mögliche Ursache hierfür ist, dass die Umrechnung der Messwerte x' in die für die Regression verwendeten Werte x (siehe Gl. 5) fehlerhaft war. Bei dieser Umrechnung wurde angenommen, dass genau nach dem Einfüllen des Farbstoffs in die Küvette die Konzentration dieses Farbstoffes im Wasser gleich 0 ist. Nun kommt es jedoch schon durch das Einfüllen des Farbstoffs zu einer Vermischung beider Flüssigkeiten in der Grenzschicht. Somit ist keine genaue Verschiebung der Werte (Gl. 5) möglich. Auch war die 2. verwendete Küvette trotz einiger Reinigungsversuche vorher nicht komplett sauber. Ein kleiner Rest des Methylenblau der Vorgängergruppe schien verblieben zu sein. Durch die eben bereits erwähnte große und sogar tendenziell steigende Abweichung der Messwerte der zweiten Messung (Abb. 5) bei großen Zeiten, erscheint der aus der ersten Messreihe bestimmte Diffusionskoeffizient glaubwürdiger. Dieser Eindruck stimmt wegen der sich ergebenden Fehler auch mit dem gewichteten Mittelwert \bar{D} der beiden Messungen überein.

Die mit dem berechneten Wert von D gezeichneten Graphen liegen für die Versuchsgenauigkeit, erstaunlich dicht an den Messwerten der Konzentrationsprofile. Wir befinden uns zwar oft nicht innerhalb der Fehlerintervalle, das war aber auch kaum zu erwarten, da einige, quantitativ nicht zu fassende Dinge, wie die Verschmutzung der Küvetten und die starke Inhomogenität der Filter nicht mit in die Rechnung eingeflossen sind. Sie sollten aber den größten Anteil am Fehler ausmachen. Die einzelnen Messpunkte zeigen bis auf wenige Ausnahmen sogar die vorhergesagte Abweichung aufgrund der fortgeschrittenen Zeit bei der jeweils 2. Messung.

Insgesamt kann die Messung als Erfolg gewertet werden, zeigen wir doch deutlich die quantitative Vorhersage und liegen, bedenkt man die schon etwas mitgenommenen Versuchsmittel, dicht bei den theoretischen Werten.

A Tabellen und Grafiken

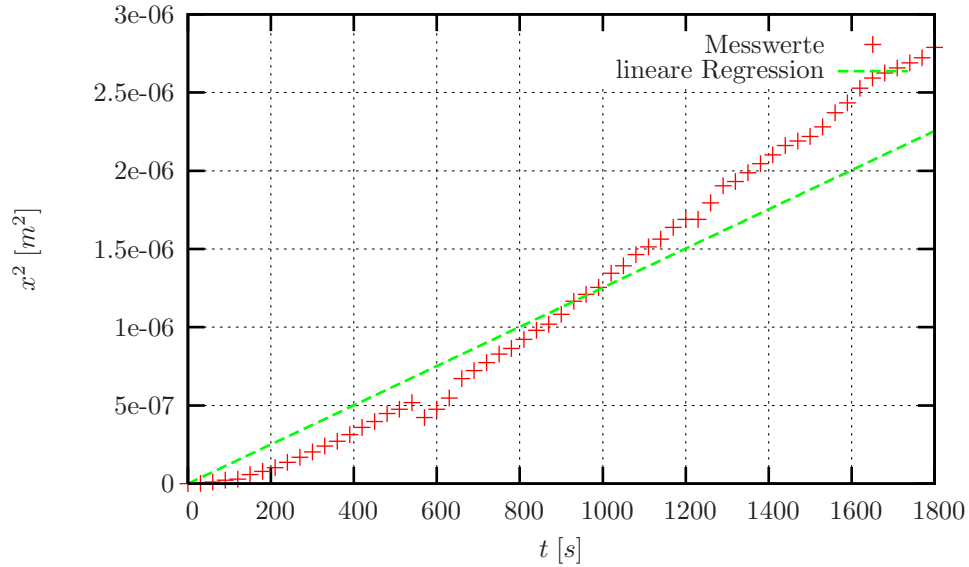


Abbildung 4: quadratischer Ort x^2 gegen die Zeit t aufgetragen (1. Messung, Konzentration $c_0/16$)

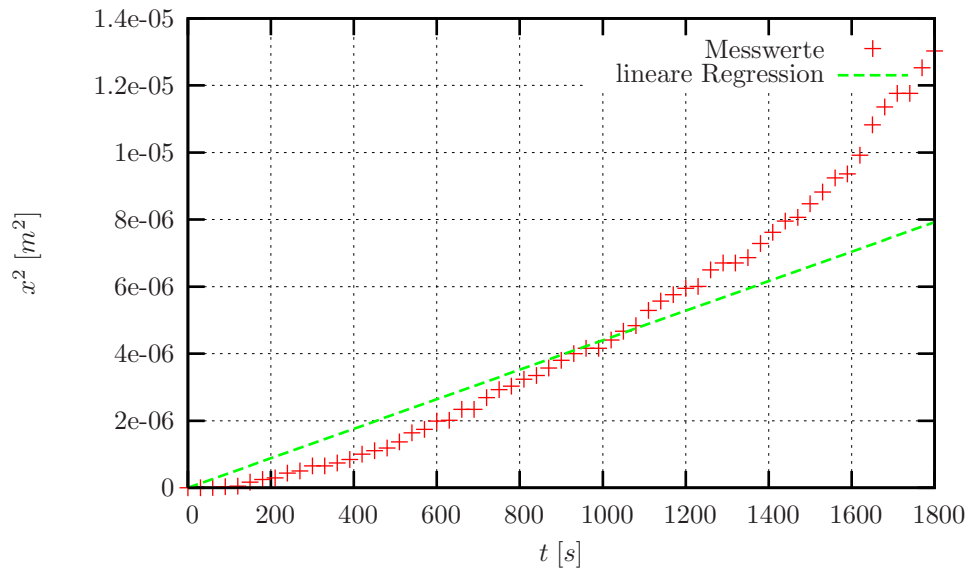


Abbildung 5: quadratischer Ort x^2 gegen die Zeit t aufgetragen (2. Messung, Konzentration $c_0/32$)

t [s]	x' [$m \cdot 10^{-3}$]	x [$m \cdot 10^{-3}$]	σ_x [$m \cdot 10^{-3}$]	x^2 [$m \cdot 10^{-6}$]	σ_{x^2} [$m \cdot 10^{-6}$]
0	2,87	0,00	0,01	0,0000	0,0000
30	2,91	0,04	0,01	0,0016	0,0008

t [s]	x' [$m 10^{-3}$]	x [$m 10^{-3}$]	σ_x [$m 10^{-3}$]	x^2 [$m 10^{-6}$]	σ_{x^2} [$m 10^{-6}$]
60	2,97	0,10	0,01	0,1000	0,0020
90	3,02	0,15	0,01	0,0225	0,0030
120	3,04	0,17	0,01	0,0289	0,0034
150	3,11	0,24	0,01	0,0576	0,0048
180	3,15	0,28	0,01	0,0784	0,0056
210	3,19	0,32	0,01	0,1024	0,0064
240	3,24	0,37	0,01	0,1369	0,0074
270	3,28	0,41	0,01	0,1681	0,0082
300	3,32	0,45	0,01	0,2025	0,0090
330	3,36	0,49	0,01	0,2401	0,0098
360	3,39	0,52	0,01	0,2704	0,0104
390	3,43	0,56	0,01	0,3136	0,0112
420	3,47	0,60	0,01	0,3600	0,0120
450	3,50	0,63	0,01	0,3969	0,0126
480	3,54	0,67	0,01	0,4489	0,0134
510	3,56	0,69	0,01	0,4761	0,0138
540	3,59	0,72	0,01	0,5184	0,0144
570	3,52	0,65	0,01	0,4225	0,0130
600	3,56	0,69	0,01	0,4761	0,0138
630	3,61	0,74	0,01	0,5476	0,0148
660	3,69	0,82	0,01	0,6724	0,0164
690	3,72	0,85	0,01	0,7225	0,0170
720	3,75	0,88	0,01	0,7744	0,0176
750	3,78	0,91	0,01	0,8281	0,0182
780	3,80	0,93	0,01	0,8649	0,0186
810	3,83	0,96	0,01	0,9216	0,0192
840	3,86	0,99	0,01	0,9801	0,0198
870	3,88	1,01	0,01	1,0201	0,0202
900	3,91	1,04	0,01	1,0816	0,0208
930	3,95	1,08	0,01	1,1664	0,0216
960	3,97	1,10	0,01	1,2100	0,0220
990	3,99	1,12	0,01	1,2544	0,0224
1020	4,03	1,16	0,01	1,3456	0,0232
1050	4,05	1,18	0,01	1,3924	0,0236
1080	4,08	1,21	0,01	1,4641	0,0242
1110	4,10	1,23	0,01	1,5129	0,0246
1140	4,12	1,25	0,01	1,5625	0,0250
1170	4,15	1,28	0,01	1,6384	0,0256
1200	4,17	1,30	0,01	1,6900	0,0260
1230	4,17	1,30	0,01	1,6900	0,0260
1260	4,21	1,34	0,01	1,7956	0,0268
1290	4,25	1,38	0,01	1,9044	0,0276
1320	4,26	1,39	0,01	1,9321	0,0278
1350	4,28	1,41	0,01	1,9881	0,0282
1380	4,30	1,43	0,01	2,0449	0,0286
1410	4,32	1,45	0,01	2,1025	0,0290
1440	4,34	1,47	0,01	2,1609	0,0294
1470	4,35	1,48	0,01	2,1904	0,0296
1500	4,36	1,49	0,01	2,2201	0,0298
1530	4,38	1,51	0,01	2,2801	0,0302

t [s]	x' [$m 10^{-3}$]	x [$m 10^{-3}$]	σ_x [$m 10^{-3}$]	x^2 [$m 10^{-6}$]	σ_{x^2} [$m 10^{-6}$]
1560	4,41	1,54	0,01	2,3716	0,0308
1590	4,43	1,56	0,01	2,4336	0,0312
1620	4,46	1,59	0,01	2,5281	0,0318
1650	4,48	1,61	0,01	2,5921	0,0322
1680	4,49	1,62	0,01	2,6244	0,0324
1710	4,50	1,63	0,01	2,6569	0,0326
1740	4,51	1,64	0,01	2,6896	0,0328
1770	4,52	1,65	0,01	2,7225	0,0330
1800	4,54	1,67	0,01	2,7889	0,0334

Tabelle 1: Ergebnisse der 1. Messung

t [s]	x' [$m 10^{-3}$]	x [$m 10^{-3}$]	σ_x [$m 10^{-3}$]	x^2 [$m 10^{-6}$]	σ_{x^2} [$m 10^{-6}$]
0	2,81	0,00	0,01	0,0000	0,0000
30	2,86	0,05	0,01	0,0025	0,0011
60	2,88	0,07	0,01	0,0049	0,0014
90	2,98	0,17	0,01	0,0289	0,0034
120	3,03	0,22	0,01	0,0484	0,0044
150	3,22	0,41	0,01	0,1681	0,0082
180	3,31	0,50	0,01	0,2500	0,0100
210	3,35	0,54	0,01	0,2916	0,0108
240	3,47	0,66	0,01	0,4356	0,0132
270	3,52	0,71	0,01	0,5041	0,0142
300	3,62	0,81	0,01	0,6561	0,0162
330	3,62	0,81	0,01	0,6561	0,0162
360	3,67	0,86	0,01	0,7396	0,0172
390	3,73	0,92	0,01	0,8464	0,0184
420	3,81	1,00	0,01	1,0000	0,0200
450	3,86	1,05	0,01	1,1025	0,0210
480	3,90	1,09	0,01	1,1881	0,0218
510	3,98	1,17	0,01	1,3689	0,0234
540	4,09	1,28	0,01	1,6384	0,0256
570	4,13	1,32	0,01	1,7424	0,0264
600	4,22	1,41	0,01	1,9881	0,0282
630	4,23	1,42	0,01	2,0164	0,0284
660	4,34	1,53	0,01	2,3409	0,0306
690	4,34	1,53	0,01	2,3409	0,0306
720	4,45	1,64	0,01	2,6896	0,0328
750	4,52	1,71	0,01	2,9241	0,0342
780	4,55	1,74	0,01	3,0276	0,0348
810	4,61	1,80	0,01	3,2400	0,0360
840	4,64	1,83	0,01	3,3489	0,0366
870	4,70	1,89	0,01	3,5721	0,0378
900	4,76	1,95	0,01	3,8025	0,0390
930	4,81	2,00	0,01	4,0000	0,0400
960	4,85	2,04	0,01	4,1616	0,0408
990	4,85	2,04	0,01	4,1616	0,0408
1020	4,91	2,10	0,01	4,4100	0,0420

t [s]	x' [$m 10^{-3}$]	x [$m 10^{-3}$]	σ_x [$m 10^{-3}$]	x^2 [$m 10^{-6}$]	σ_{x^2} [$m 10^{-6}$]
1050	4,97	2,16	0,01	4,6656	0,0432
1080	5,01	2,20	0,01	4,8400	0,0440
1110	5,11	2,30	0,01	5,2900	0,0460
1140	5,17	2,36	0,01	5,5696	0,0472
1170	5,21	2,40	0,01	5,7600	0,0480
1200	5,25	2,44	0,01	5,9536	0,0488
1230	5,26	2,45	0,01	6,0025	0,0490
1260	5,36	2,55	0,01	6,5025	0,0510
1290	5,40	2,59	0,01	6,7081	0,0518
1320	5,40	2,59	0,01	6,7081	0,0518
1350	5,43	2,62	0,01	6,8644	0,0524
1380	5,51	2,70	0,01	7,2900	0,0540
1410	5,57	2,76	0,01	7,6176	0,0552
1440	5,63	2,82	0,01	7,9524	0,0564
1470	5,65	2,84	0,01	8,0656	0,0568
1500	5,72	2,91	0,01	8,4681	0,0582
1530	5,78	2,97	0,01	8,8209	0,0594
1560	5,85	3,04	0,01	9,2416	0,0608
1590	5,87	3,06	0,01	9,3636	0,0612
1620	5,96	3,15	0,01	9,9225	0,0630
1650	6,10	3,29	0,01	10,8241	0,0658
1680	6,18	3,37	0,01	11,3569	0,0674
1710	6,24	3,43	0,01	11,7649	0,0686
1740	6,24	3,43	0,01	11,7649	0,0686
1770	6,35	3,54	0,01	12,5316	0,0708
1800	6,42	3,61	0,01	13,0321	0,0722

Tabelle 2: Ergebnisse der 2. Messung

C/C_0	x [mm]			
	t = 102 min	t = 98 min	t = 40 min	t = 43 min
1/2	0.00(1)	-0.17(1)	0.16(1)	-0.16(1)
1/4	0.47(1)	0.54(1)	1.07(1)	1.26(1)
1/8	1.27(1)	1.29(1)	2.37(1)	2.46(1)
1/16	1.64(1)	1.65(1)	3.22(1)	3.32(1)
1/32	3.1(1)	3.12(1)	5.68(1)	5.77(1)

Tabelle 3: Die verschobenen Werte der Konzentrationsprofil-Messungen

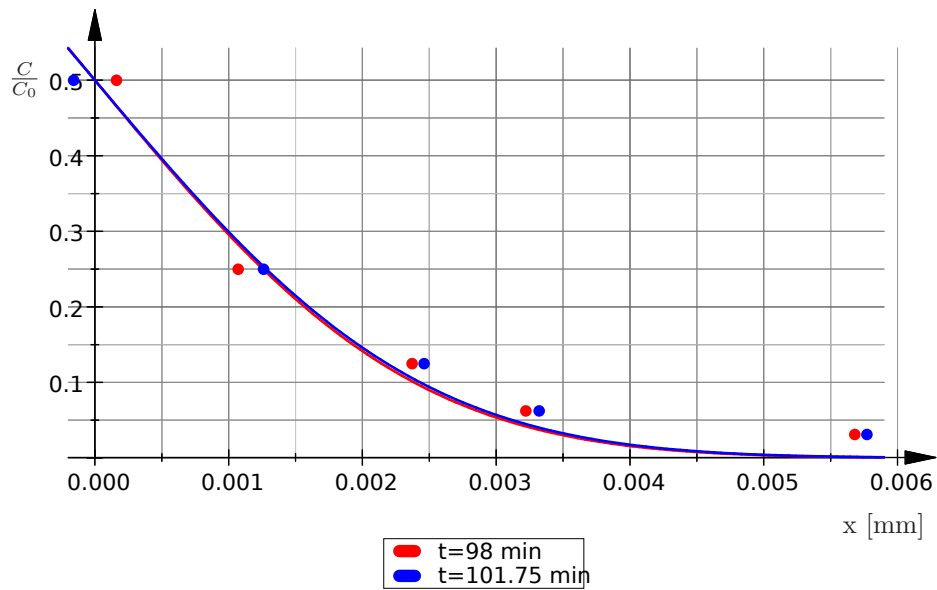


Abbildung 6: Theoretisches und praktisches Konzentrationsprofil nach ca. 100 min

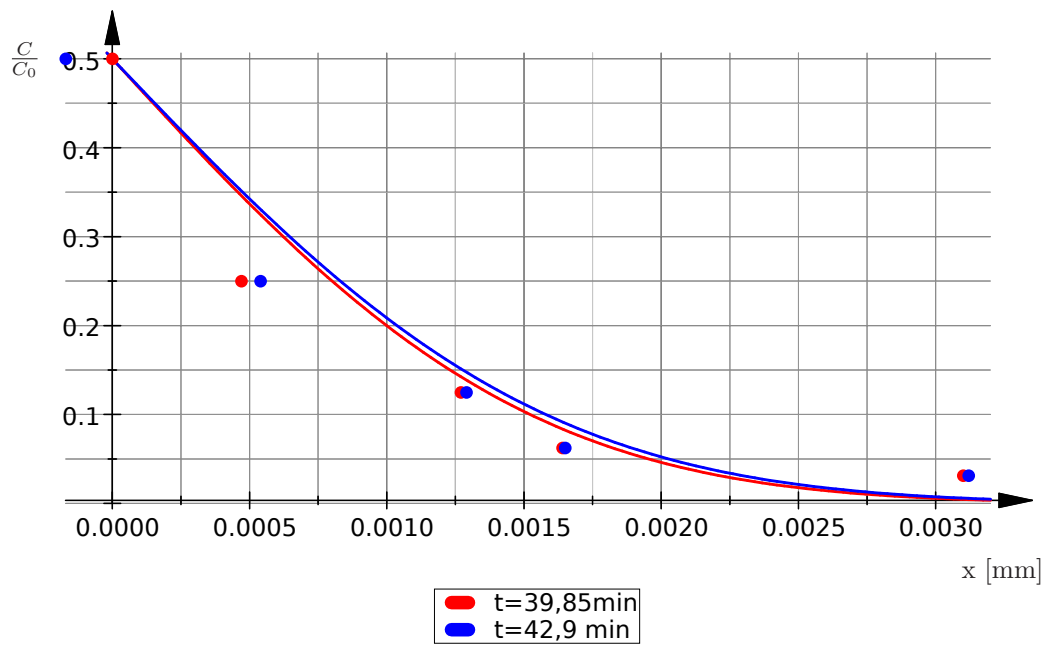


Abbildung 7: Theoretisches und praktisches Konzentrationsprofil nach ca. 40 min