

Physikalisches F-Praktikum

Die Optische Pinzette

Praktikanten: Steffen Klemer
 Nils Kanning
 fprak@noch-mehr-davon.de

Durchgeführt am: 27.05.2008

Gruppe: II-WiSe 0708-6

Assistent: André Beerlink

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
2	Theorie	4
2.1	Optische Kräfte	5
2.1.1	Mie Regime	5
2.1.2	Rayleigh Regime	8
2.2	Kolloide	9
2.3	Brownsche Bewegung	10
3	Aufbau und Durchführung	11
3.1	Aufbau	11
3.2	Messungen	11
4	Auswertung	12
4.1	Gütefaktor der Falle	12
4.2	Literaturrecherche	12
4.3	Diffusion	13
4.4	Laserleistung	13
4.5	Eichmessung	14
5	Ergebnis	14
6	Anwendung	14
6.1	Fluktuationstheorem	15
6.2	Experiment	15
6.3	Auswirkungen	16
	Literatur	16

1 Einleitung

Die *Optische Pinzette* (eng. *Laser Tweezers*) ist ein Aufbau aus einem Laser und einigen Linsen, mit dem Objekte bis zu einigen Mikrometern Größe stabil in einer definierten Position gehalten werden können. Nach ersten Beobachtungen 1970, baute Arthur Ashkin 1985 eine erste dreidimensionale Falle mit nur einem Laserstrahl. Während zu Anfang vor allem größere Objekte aus der Biophysik (wie Bakterien und Viren) untersucht wurden, erweiterte Steven Chi das Prinzip auf die 0.1 nm Skala und kühlte damit einzelne Atome. Dies brachte ihm 1997 zusammen mit Claude Cohen-Tannoudji und William D. Phillips den Physik-Nobelpreis ein.

Heute werden optische Fallen u.a. verwendet, um molekulare Motoren, Polymere oder Cytoskelette zu untersuchen – aber auch für einfache Quantenregister eines hypothetischen, zukünftigen Quantencomputers.

2 Theorie

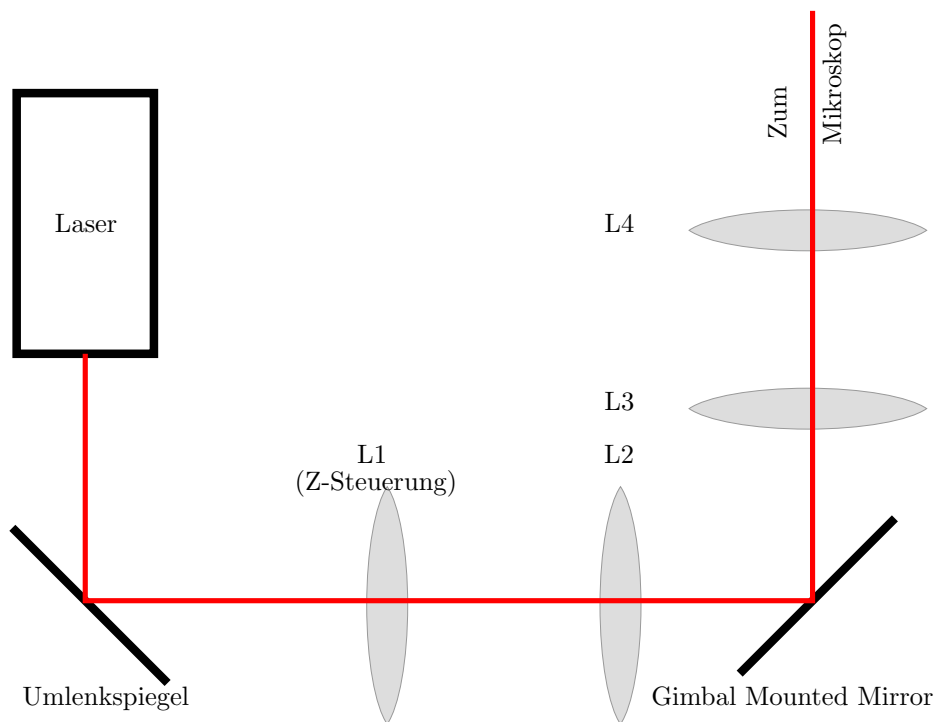


Abbildung 1: Schema des Aufbaus

Der Aufbau einer optischen Pinzette ist relativ simpel. Wir beschreiben hier einen nach Fällman und Axner[Fae97]. Unser Aufbau ist in Abb. 1 zu sehen. Er besteht aus einem starken Laser (in unserem Fall 250 mW bei 671 nm), 4 Linsen, wobei die erste nur per Hand bewegt werden kann und zur z-Steuerung dient. Die xy-Steuerung wird mit einem motorgetriebenen, kardanisch aufgehängten Spiegel (Gimbal Mounted Mirror - GMM) erreicht.

Die Linsen 3 und 4 sind zum Aufweiten des Strahles, um eine Überfüllung des Objektivs zu erreichen. Dass dies nützlich ist, sehen wir später. Das Licht gelangt dann in ein Mikroskop, in dessen Objekthalterung das zu beobachtende Objekt liegt.

Um eine gefahrlose Beobachtung mit dem Auge bzw. einer CCD zu ermöglichen, wird der Laser rückwärtig durch einen dichroischen Spiegel eingekoppelt. Dieser halbdurchlässige Spiegel reflektiert vor allem rote Wellenlängen.

2.1 Optische Kräfte

Die Funktionsweise ist bei gleichem Aufbau abhängig von der Größe d des Objektes und der Wellenlänge λ des Lichtes. Man unterscheidet drei Fälle:

- *Mie Regime* ($d \gg \lambda$)
Bei großen Teilchendurchmessern, kann die geometrische Strahlenoptik zur Herleitung verwendet werden. Dies ist z.B. für ganze Zellen oder Vesikel gegeben.
- *Übergangsregime* ($d \approx \lambda$)
Ist das Teilchen in der Größe der Wellenlänge wird die Beschreibung kompliziert. Leider sind die meisten Anwendungen – gerade in der Biophysik – in diesem Regime.
- *Rayleigh Regime* ($d \ll \lambda$)
Bei sehr kleinen Teilchen, beschreibt man selbige als punktförmigen Dipol und kann die elektromagnetische Theorie des Lichtes verwenden. Atomfallen können so beschrieben werden.

Wir wollen die beiden Grenzfälle näher betrachten:

2.1.1 Mie Regime

Wie bereits angesprochen, betrachten wir nun große Partikel und können folglich Beugungs- und Interferenzeffekte vernachlässigen – wir betrachten das Licht als Strahlen, die gebrochen oder reflektiert werden.

Zunächst Reflexion auf einem Teilchen: Wir können einem Photon einen Impuls zuordnen – folglich wirkt beim Rückstoß nach dem 3. Newtonschen Gesetz eine Kraft auf das Teilchen. Diese wird *Streukraft* genannt und wirkt in Strahlrichtung. Das ist natürlich unerwünscht und sollte minimiert werden.

Betrachten wir jetzt ein allgemeines Teilchen, so ist die Reflexion in eine beliebige Richtung und es tritt weiterhin Brechung auf. Auch hierbei ändert sich die Richtung des Strahls und damit der Impuls. Die resultierende Gesamtkraft zerlegen wir in den bereits erwähnten Streukraft-Anteil und einen Anteil, der *Gradientenkraft* genannt wird. Diese wirkt immer in Richtung des Fokus. Sie ist die *fangende* Kraft. In Abb. 2 sind 2 Fälle dargestellt. Im ersten Fall ist das Teilchen etwas unterhalb des Fokus, im zweiten etwas oberhalb. Es werden je 2 äußere Strahlen betrachtet, die sich in der Summe zu einer Gradientenkraft addieren.

Nun kann auch erklärt werden, warum das Objektiv überfüllt wird. Denn gehen wir von einem Gaußförmigen Intensitätsprofil aus, dann ist die Intensität am Rand eher klein. Aber die Randstrahlen erzeugen gerade den erwünschten Effekt. Um diesen zu vergrößern, nimmt man bewusst in Kauf, dass ein Teil der Intensität abgeschnitten wird. Um den mittleren Anteil, der vor allem die Streukraft erzeugt, zu unterdrücken, werden zum Teil Blenden, aber auch von vorn herein andere – *Donutförmige* – Intensitätsprofile eingesetzt. Anschaulich ist klar, dass aufgrund des Kräftegleichgewichts zwischen Streu- und Gradientenkraft das Teilchen sich immer

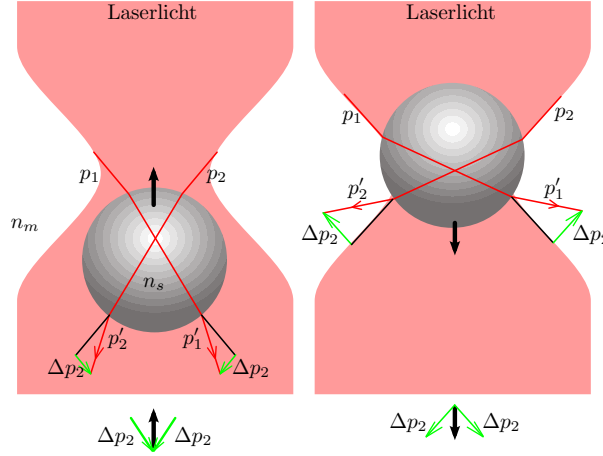


Abbildung 2: Schema eines mehrfach reflektierten Strahls

etwas hinter dem Fokus des Laserstrahls befinden wird. Auch muss die Gradientenkraft die Brownsche Bewegung unterdrücken.

Nun wollen wir die Kräfte herleiten. Hierzu betrachten wir einen Strahl der Leistung P . Dieser trifft auf ein, der Einfachheit halber kugelförmig angenommenes, Teilchen. Er wird mit dem Anteil R reflektiert und mit dem Anteil T transmittiert, wobei er aufgrund des anderen Brechungsindex der Kugel noch seine Richtung ändert. Dies passiert mehrfach und ist in Abb. 3 dargestellt. Jetzt beschränken wir uns auf maximal zweifach transmittierte Strahlen und zerlegen die resultierenden Impulsänderungen in eine Kraft in z - und eine in y -Richtung, wobei der Strahl in z -Richtung verläuft (vgl. Abb. 2). Da das Problem rotationssymmetrisch ist, betrachten wir die x -Komponente nicht weiter.

Eine allgemeine Impulsänderung berechnen wir mittels der Leistung:

$$P = \frac{dE}{dt} = F \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dp}{dt} \cdot c_m = \frac{dp}{dt} \cdot \frac{c}{n_m}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dp}{dt} = \frac{n_m P}{c}$$

mit der effektiven Lichtgeschwindigkeit im Medium c_m , der effektiven Brechzahl n_m sowie der Vakuumlichtgeschwindigkeit c .

Dann erhalten wir (vgl. [Ash92]):

$$F_z = \frac{n_m P}{c} - \left[\frac{n_m P R}{c} \cos(\pi + 2\vartheta_i) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n_m P}{c} T^2 R^n \cos(\alpha + n\beta) \right]$$

$$F_y = 0 - \left[\frac{n_m P R}{c} \sin(\pi + 2\vartheta_i) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n_m P}{c} T^2 R^n \sin(\alpha + n\beta) \right]$$

Wir sind an der Gesamtkraft \vec{F} interessiert. Diese ist eine Vereinigung aus den beiden Komponenten. Um einfacher rechnen zu können, verwenden wir den Trick von VAN DE HULST, den auch Ashkin in [Ash92] zitiert und setzen:

$$F = F_z + iF_y$$

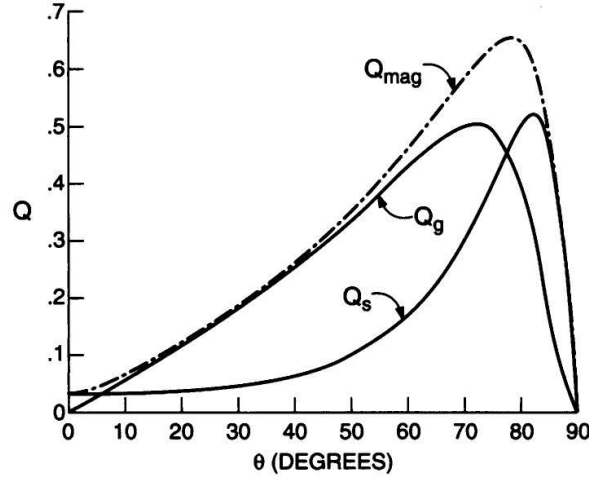


Abbildung 4: Betrag der Gütefaktoren (und damit der Kräfte) bei einer effektiven Brechzahl $n = 1.2$. Q_g ist die Gradientenkraft, Q_s die Streukraft und $Q_{mag} = \sqrt{Q_s^2 + Q_g^2}$ die Gesamtkraft. Quelle: [Ash92]

Die Gesamtkraft eines Lichtstrahls kann als Summe über alle Einzelstrahlen ermittelt werden. Dabei ist aber zu beachten, dass die gerade berechneten Kräfte im System des Strahls angegeben sind und über die Einfallswinkel ϑ_i noch in ein einheitliches Koordinatensystem umgerechnet werden müssen.

2.1.2 Rayleigh Regime

Wir nehmen das vergleichsweise sehr kleine Teilchen als, durch das Feld induzierten, punktförmigen Dipol an. Die Gesamtkraft setzt sich dann aus zwei Komponenten zusammen – der Lorentzkraft auf den Dipol sowie dem Strahlungsdruck der einfallenden Welle.

Letztere berechnen wir mit der Streutheorie des Lichtes. Hierzu betrachten wir den Wirkungsquerschnitt C_{pr} – den Kraftanalog des Lichtes auf einen Schwarzkörper der Fläche C_{pr} . Die gesamte Abschwächung des Strahls C_{ext} durch das Teilchen können wir als Summe aus Streuteil und Absorption beschreiben:

$$C_{ext} = C_{abs} + C_{sca}$$

Ein Teil des Lichtes wird vorwärtsgestreut. Der Rest, also insbesondere der gesamte absorbierte Anteil, trägt zum Impuls auf das Teilchen über Impuls=Energie/ c bei, wobei die Energie proportional zum Wirkungsquerschnitt ist.

Den vorwärtsgerichteten Anteil können wir über $\langle \cos \vartheta \rangle C_{sca}$ annähern, was zu

$$C_{pr} = C_{ext} - \langle \cos \vartheta \rangle C_{sca}$$

führt. Die gesuchte Kraft ist dann (vgl. [Bee08])

$$\vec{F}_{\text{Streu}} = n_m \frac{\langle \vec{S} \rangle_t C_{pr}}{c}.$$

Hierbei ist $\langle \cos \vartheta \rangle$ der mittlere Kosinus des Einfallswinkels, $\langle \vec{S} \rangle_t$ der zeitliche Mittelwert des Poynting-Vektors und n_m der Brechungsindex des umgebenden Mediums. Die Kraft wirkt in Richtung des einfallenden Lichtes.

Für isotrope Körper mit geringer Absorption ist $\langle \cos \vartheta \rangle = 0$ und somit $C_{pr} \approx C_{sca}$. Dann erhalten wir aus [Bee08]:

$$C_{pr} = \frac{8}{3} \pi k^4 \left(\frac{m^2 - 1}{m^2 + 2} \right)^2 r^6$$

mit der Wellenzahl im Medium $k = 2\pi/\lambda_m$ und dem effektiven Brechungsindex $m = n_s/n_m$.

Die zweite angesprochene Kraft ist die Lorentzkraft auf den induzierten Dipol. Diese ist

$$\vec{F}_{\text{Grad}} = (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{d\vec{p}}{dt} \times \vec{B}.$$

Im einfachen Fall einer skalaren Polarisierbarkeit α ist $\vec{p} = \alpha \vec{E}$ und somit

$$\vec{F}_{\text{Grad}} = \alpha \left((\vec{E} \cdot \nabla) \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{d\vec{E}}{dt} \times \vec{B} \right)$$

Mit den MAXWELL-Gleichungen und etwas Vektorgymnastik wird dies zu

$$\vec{F}_{\text{Grad}} = \alpha \left(\nabla \left(\frac{1}{2} \vec{E}^2 \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial(\vec{E} \times \vec{B})}{\partial t} \right).$$

Wir verwenden einen Laser kontinuierlicher Leistung, wodurch die Zeitableitung verschwindet. Für einen induzierten, kugelförmigen Dipol ist

$$\alpha = n_m^2 \frac{m^2 - 1}{m^2 + 2} r^3.$$

Für den Regelfall eines $\alpha > 0$ (also $n_m > n_s$) wirkt \vec{F}_{Grad} gerade in Richtung hoher Intensität.

Damit die Gradientenkraft stärker als die Streukraft ist, brauchen wir einen stark fokussierten Laser, was wieder durch ein Objektiv mit hoher numerischer Apertur erreicht wird. Da die Streukraft proportional zu $1/\lambda^4$ ist, ist außerdem eine große Wellenlänge vorteilhaft.

Um eine einfache Aussage über eine Falle treffen zu können, führt man einen Gütefaktor Q ein:

$$Q := \frac{F_{\text{Grad}}}{F_{\text{Streu}}} = \frac{3\sqrt{3}}{64\pi^5} \frac{n_m^2}{\left(\frac{m^2-1}{m^2+2}\right)} \frac{\lambda^5}{r^3 \omega_0^2} \quad (1)$$

$$\omega_0 := \frac{\lambda}{\pi \cdot \text{NA}}$$

Dieser sollte für eine stabile Falle deutlich größer als 1 sein.

2.2 Kolloide

Wir werden in diesem Versuch je ein kugelförmiges Teilchen mit dem Durchmesser 800nm einfangen. Allgemein werden Teilchen in einer Trägerflüssigkeit auch als Kolloide bezeichnet. Wir verwenden hier Latexkolloide in einer Wasser-Glycerin

Lösung. Über das Mischungsverhältnis dieser beiden, können Viskositäten zwischen $1 \cdot 10^{-3}$ Pa s (reines Wasser) bis zu $1000 \cdot 10^{-3}$ Pa s (reines Glycerin) eingestellt werden.

Unsere Kügelchen bestehen aus Polystyrol ($C_6H_5CH-CH_2-$) und sind lichtdurchlässig. Zum Teil werden sie auch als Latexkolloide bezeichnet, wobei nicht das aus Kautschuk hergestellte Latex gemeint ist. Um die Teilchen gut einzufangen zu können, muss zum einen die Teilchendichte recht gut abgestimmt sein, da es sonst sehr lange dauert ein Teilchen in den Strahlengang zu bekommen bzw. die Teilchen sich gegenseitig aus der Falle stoßen. Und zum anderen muss Aggregation verhindert werden. Dabei klumpen Teilchen aufgrund der Van-der-Waals-Wechselwirkung zusammen. Dies wird in unserem Fall durch an der Oberfläche angelagerte Polymere, die als Abstandshalter wirken, verhindert.

2.3 Brownsche Bewegung

Bewegliche, relativ leichte, Teilchen werden durch äußere Kräfte ständig bewegt. Dies führt zu einer zufälligen Translationbewegung. Beschreiben können wir dieses Phänomen über eine mittlere Wirkung aus der Summe aller Kräfte – der Reibung, sowie einer statistischen Kraft $\vec{f}(t)$:

$$M\vec{v} = -\gamma\vec{v} + \vec{f}(t) \quad (2)$$

γ ist der Reibungskoeffizient. f ist gerade so gewählt, dass

$$\langle \vec{f}(t) \rangle = 0$$

$$\vec{f}(t) \sim e^{-t^2} \text{ (f ist gaussisch wegen dem zentralen Grenzwertsatz) also:}$$

$$\langle f(t)f(t') \rangle = g(t-t') = \lambda\delta(t-t')$$

$\vec{f}(t), \vec{f}(t+\tau)$ sind schon für sehr kleine τ statistisch unabhängig

Die Kovarianz-Eigenschaft bezeichnet man auch als *weißes Rauschen*, die Gl. 2 als LANGEVIN-Gleichung. Mit diesen Eigenschaften, kann nun die Geschwindigkeit und die mittlere quadratische Geschwindigkeit $\langle v^2 \rangle$ und somit die kinetische Energie eines Teilchens bestimmt werden. Diese sollte aufgrund des Gleichverteilungssatzes gleich $3/2kT$ sein. Damit erhält man eine Formel für λ :

$$\lambda = 2\gamma kT \text{ und} \\ \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{M}} \quad (3)$$

Außerdem können wir das mittlere Auslenkungsquadrat bestimmen über

$$\langle x^2(t) \rangle = \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \langle v(t_1)v(t_2) \rangle,$$

was nach längerer Rechnung zu

$$\langle x^2(t) \rangle \approx 2Dt \text{ mit } D := \frac{kT}{\gamma}$$

führt. Die Näherung besteht darin, dass $t_1, t_2 \gg \gamma/M$ und $t \gg D\gamma$ angenommen wird. γ kann man über die Viskosität der Flüssigkeit und den Radius der Teilchen ausdrücken: $\gamma = 3\pi\eta r/n$, folglich:

$$\langle x^2(t) \rangle \approx \frac{3nT}{6\pi\eta r} \quad (4)$$

n ist die Dimension.

Ähnlich hierzu gibt es auch eine Rotationsbewegung, die in unserem Fall von kugelförmigen Teilchen in der Falle, keinen Einfluss hat.

Durch die Brownsche Bewegung erhalten wir einen Diffusionsprozess. Hierdurch werden Teilchenkonzentrationsunterschiede ausgeglichen durch einen Strom j . Dies kann mit dem 1. FICKSchen Gesetz beschrieben werden:

$$j = -D \frac{\partial c}{\partial x} \quad (c \text{ ist die Konzentration})$$

j wird durch die Kontinuitätsgleichung $\dot{c} + \partial j / \partial x = 0$ eingeschränkt, was uns zum 2. FICKSchen Gesetz führt:

$$\dot{c} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}.$$

Dies ist die bekannte Diffusionsgleichung und hat als Lösung den bereits zuvor gesehenen Zusammenhang

$$x \propto \sqrt{t}$$

3 Aufbau und Durchführung

3.1 Aufbau

Der Aufbau ist analog zu Abs. 2. Der verwendete Aufbau enthält für andere Versuche noch einen Polarisations-Beamsplitter. Wir verwenden diesen zusammen mit dem $\lambda/2$ -Plättchen, um die Leistung des Lasers zu regulieren.

Als Mikroskop verwenden wir ein Axiovert 40 von Zeiss mit einem Öl-Immersions-Objektiv (100x, NA 1.3) ebenfalls von Zeiss und ein DPSS Lasersystem mit real ca. 140mW bei 671nm und einem gaussförmigen TEM₀₀ Strahlprofil.

3.2 Messungen

Wir vermessen 3 selbst hergestellte Kolloidproben in 3 verschiedenen Glycerin-Wasser-Lösungen (40:60, 30:70 und 20:80). Die Latex-Kolloide haben einen Radius von $r = 400\text{nm}$.

Zunächst haben wir aber mit einem Powermeter an der Stelle des Mikroskops die Laserleistung bei verschiedenen Winkeln ($-90^\circ, \dots, 90^\circ$) des $\lambda/2$ -Plättchens vermessen.

Anschließend wurde für alle 3 Proben je ein Teilchen gefangen und durch Verstellen des GMM der Strahl mit einer konstanten Geschwindigkeit horizontal vor und zurück bewegt. Bei voller Leistung bewegt sich das Teilchen mit. Nun wurde die

Leistung durch Verstellen des Winkels während Phasen der Bewegung heruntergeregelt, bis das Teilchen abfiel. Dies haben wir für 5 Geschwindigkeiten je 3 mal gemacht.

Die Winkel, bei denen das Teilchen abfiel, liegen sehr dicht beieinander. Vor allem am Ende war der Winkel sehr schwer zu bestimmen, da in einigen Bereichen der *Flugbahn* das Teilchen gar nicht mehr gehalten wurde. Die letzten ermittelten Werte – die Winkel bei großen Geschwindigkeiten der 20:80 Lösung – sind nicht sehr belastbar.

4 Auswertung

4.1 Gütefaktor der Falle

In Gl. 1 haben wir den Gütefaktor ausgedrückt. Setzen wir dort die Größen unseres Aufbaus ein:

$$\begin{aligned}r &= 400 \text{ nm} \\ \lambda &= 671 \text{ nm} \\ n_m &= 1.33 \\ n_s &= 1.59 \\ \Rightarrow m &= 1.2 \\ \text{NA} &= 1.3,\end{aligned}$$

so erhalten wir

$$Q \approx 0.3,$$

was deutlich kleiner als 1 ist. Aber wir befinden uns auch nicht im Rayleigh-Regime mit unseren hunderte Nanometer großen Kolloiden. Folglich sind beide im Theorie-teil vorgestellten Näherungen hier nicht anwendbar.

4.2 Literaturrecherche

In den Quellen [Via92, Vib92] ist gezeigt, dass das Rayleigh Regime für

$$\frac{2\pi r}{\lambda} \ll 1$$

und das Mie Regime entsprechend bei

$$\frac{2\pi r}{\lambda} \gg 1$$

gültig ist.

Mit der optischen Pinzette kann auch das elektromagnetische Moment in dielektrischen Medien bestimmt werden. In [Gor73] wird hierfür ein Lichtstrahl durch eine Membran am Eingang eines abgeschlossenen gasgefüllten Volumens geschickt. Innerhalb des polarisierbaren Gases, gibt es nun einen Potentialgradienten und folglich eine Kraft, die Teilchen zum Strahl zieht. Dies bewirkt eine Druckänderung, die Membran reagiert darauf entsprechend durch eine andere Spannung (der Außenraum ist evakuiert). Der Druck im Gas beträgt

$$p = \frac{1}{2}N\alpha E^2 + p_0$$

mit der Polarisierbarkeit α , dem elektrischen Feld E , der Atomdichte N und dem *normalen* Gasdruck p_0 . Daraus folgt eine Kraft auf eine Einheitsfläche der Membran

$$\vec{f} = -p\vec{e}_z = \frac{(1-n)}{cn}\vec{S}$$

mit dem Brechungsindex des Gases n , der Lichtgeschwindigkeit c und dem Poynting Vektor $\vec{S} = c\vec{E} \times \vec{B}/4\pi$. Aus \vec{S} erhalten wir dann das elektromagnetische Moment über $\vec{G} = \vec{S}/c^2$. Effektiv führen wir diese Bestimmung des elektromagnetische Moment also auf die Bestimmung eines Druckes zurück. Laut [Gor73] ist dieses Verfahren jedoch experimentell nicht realisierbar.

4.3 Diffusion

Wir wollen exemplarisch für $r = 400\text{nm}$ große Latexkolloide in 1:1, 3:2 und 7:3 Glycerin-Wasser Lösungen die mittlere Wegstrecke eines Teilchens berechnen. Die Temperatur sei $T = 25^\circ\text{C}$. Die angegebenen Viskositäten stammen aus [Bee08]. Wir erhalten die Wegstrecken mittels Gl. 4 unter der Annahme von 3 Dimensionen.

Glycerin:Wasser	η [mPa]	x_{1s}	x_{60s}	x_{3600s}
1:1	6,04E-03	736,44E-09	5,70E-06	44,19E-06
3:2	10,68E-03	553,79E-09	4,29E-06	33,23E-06
7:3	23,04E-03	377,06E-09	2,92E-06	22,62E-06

Mit der Dichte der Kolloide $\rho = 1.05\text{g/cm}^3$ können wir über Gl. 3 die mittlere Geschwindigkeit berechnen:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3kT}{M}} = \sqrt{\frac{3kT}{\rho\frac{4}{3}\pi r^3}} = 6,62 \text{ mm/s}$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2}M\bar{v}^2 = 6,17 \cdot 10^{-21} \text{ J} = 38,5 \text{ meV}$$

4.4 Laserleistung

Die Bestimmung der Laserleistung lieferte die Messwerte aus Abb. 5. Wir geben die Leistung in Abhängigkeit des Drehwinkels eines $\lambda/2$ -Plättchens an. Durch den Polarisations-Splitter wird nur Licht einer bestimmten Polarisation an die Falle geleitet - wir erwarten eine Abhängigkeit der Leistung vom Winkel über

$$P \propto |\vec{E}_0 \cos 2\alpha|^2$$

und haben folglich eine Funktion

$$a \cos^2(\omega\alpha + \varphi)$$

mittels Gnuplot angefitet. Der Fehler der Leistung $\sigma_P = 0.05\text{mW}$ ist der Mess- und Ablesefehler. Wir erhalten:

$$\chi^2 = 0.466$$

$$a = 0.1325(7) \text{ W}$$

$$\omega = 1.991(5)$$

$$\varphi = 0.266(4)$$

Die Fehler resultieren aus dem Fitverfahren.

4.5 Eichmessung

Die Winkel, bei der das Kolloid nicht mehr von der Falle gehalten wurde, haben wir mit der zuvor gefitteten Funktion in Leistungen umgerechnet. Nun wollen wir die Fallenkraft in Abhängigkeit von der Laserleistung bestimmen. Dazu überlegen wir uns, dass beim Abfallen des Teilchens gerade die STOKESche Reibungskraft $F = 6 \cdot \pi \eta r v$ der Fallenkraft entspricht. η erhalten wir wieder aus [Bee08], $r = 400\text{nm}$ und v ermitteln wir aus der Drehgeschwindigkeit des Spiegels, wobei ein Schritt $0,118\text{nm}$ entspricht. Mit den aus je 3 Messungen gemittelten α erhalten wir die Ergebnisse in Tab. 1. Die Leistungen haben wir in den Abb. 6ff gegen die Kraft aufgetragen. Hierbei resultiert der Fehler der Leistung aus dem Ablesfehler des Winkels von $\sigma_\alpha = 1$ über die Fehlerfortpflanzung. Da dieser recht groß ist, gingen die Fehler von α , ω und φ nicht ein. Der Fehler von F konnte nicht beachtet werden, da das Fit-Verfahren nur einen Fehler zulässt.

Auf diesem Weg erhalten wir über einen Geradenfit die (inversen) Anstiege

$$\begin{aligned} m_{40} &= 35(5) \text{ pN/W} \\ m_{30} &= 19(3) \text{ pN/W} \\ m_{20,1} &= 90(90) \text{ pN/W} \\ m_{20,2} &= 14(3) \text{ pN/W} \end{aligned}$$

Die Fehler resultieren erneut aus dem Fitverfahren. Bei den Werten für die 20er Lösung, ist ein unerwarteter Abfall zu erkennen. Nimmt man die beiden Werte heraus, so sind auch die Ergebnisse der 20er Lösung analog zu den anderen Beiden. Wie bereits bei der Durchführung geschrieben, waren die letzten Werte nicht mehr ordnungsgemäß zu ermitteln. Das Rausstreichen erscheint uns sinnvoll.

5 Ergebnis

Die Laserleistung verhält sich zum Winkel des Plättchens tatsächlich wie \cos^2 - der Fit ist recht gut. Die Fallenkraft sollte eigentlich nicht von der Viskosität der Flüssigkeit abhängen – unser Ergebnis suggeriert aber gerade das. Hierbei wurde aber nicht beachtet, dass die Bronwsche Bewegung bei kleinerer Viskosität größer ist und damit einen beträchtlichen Anteil an der Kraft hat. Dies passt qualitativ auch zu unseren Ergebnissen. Auch wenn man das Ergebnis der Diffusionsaufgabe betrachtet, sollte die Bronwsche Bewegung einen messbaren Einfluss haben. Immerhin liegt die berechnete Eigengeschwindigkeit der Teilchen zwei Größenordnungen über der, mit der wir sie bewegen.

6 Anwendung

Wir wollen hier eine Anwendung der optischen Pinzette zur experimentellen Überprüfung eines fundamentalen Theorems der Nichtgleichgewichts-statistischen Mechanik erörtern. Das *Fluktuationstheorem* besagt, dass die Entropieänderung von sehr kleinen Systemen auf kurzen Zeitskalen durchaus negativ sein kann. Dies ist erstaunlich, da der zweite Hauptsatz der Thermodynamik solche Entropieänderungen, zumindest für makroskopische Systeme, verbietet.

Zur Überprüfung des Theorems kann man mikroskopische Partikel mit Hilfe einer optischen Pinzette bewegen und die Entropie der Trajektorie berechnen. Dieser Versuch wurde im Jahr 2002 durchgeführt und war die erste experimentelle Bestätigung des Fluktuationstheorems[Wan02]. Im Folgenden skizzieren wir die zitierte Arbeit.

6.1 Fluktuationstheorem

Wie bereits oben erwähnt, gilt der zweite Hauptsatz nicht für mikroskopische Systeme. An seine Stelle tritt eine allgemeinere Aussage über die Wahrscheinlichkeit einer Phasenraumtrajektorie. Diese Wahrscheinlichkeit hängt von der durch die Trajektorie hervorgerufene Entropieänderung ab. Bezeichnen wir die Entropieänderung eines Systems durch eine Trajektorie der Dauer t mit Σ_t und die Wahrscheinlichkeit für eine solche Trajektorie mit $P(\Sigma_t)$, so gilt das *Fluktuationstheorem*:

$$\frac{P(\Sigma_t = A)}{P(\Sigma_t = -A)} = \exp(A)$$

Wir bemerken nun zunächst, dass Σ_t extensiv ist und daher mit der Dauer der Trajektorie t und der Systemgröße wächst.

Anhand der obigen Gleichung sehen wir, dass es für kleine Zeiten t und kleine Systemgrößen durchaus eine von Null verschiedene Wahrscheinlichkeit für Trajektorien mit negativer Entropieänderung gibt: $P(\Sigma_t < 0) \neq 0$. Für makroskopische Systeme, d.h. große Σ_t wird diese Wahrscheinlichkeit jedoch exponentiell unterdrückt. Damit folgt im makroskopischen Limes der zweite Hauptsatz der Thermodynamik.

Wir geben nun noch eine sog. *integrierte Form* des Fluktuationstheorems an:

$$\frac{P(\Sigma_{<0})}{P(\Sigma_{>0})} = \langle \exp(-\Sigma_t) \rangle_{\Sigma_t > 0} \quad (5)$$

Diese Beziehung wurde in [Wan02] experimentell überprüft.

6.2 Experiment

Im Experiment wird eine optische Pinzette, in deren Fokus sich eine Latexkugel der Größenordnung $10 \mu\text{m}$, umgeben von Wasser, befindet, gleichförmig mit einer Geschwindigkeit \vec{v} bewegt. Während der Bewegung wird die auf die Kugel wirkende Kraft gemessen. Aus diesen Größen kann die Entropieänderung des aus der einer Kugel bestehenden Systems berechnet werden. Eine Wiederholung des Experiments für mehrere Trajektorien lässt nun einen Vergleich mit Gl. 5 zu.

Zunächst müssen wir die auf das Teilchen in der Pinzette wirkende Kraft \vec{F} beschreiben. Wir verwenden dazu eine harmonische Näherung:

$$\vec{F} = -k(\vec{x} - \vec{x}_0) \quad (6)$$

Hier ist \vec{x}_0 der Ort des Fokus der Pinzette. Da die Pinzette mit der Geschwindigkeit \vec{v} bewegt wird, gilt also: $\vec{x}_0 = \vec{v}t$. Sind \vec{v} und \vec{F} bekannt, so ist die Entropieänderung¹ entlang der Trajektorie gegeben durch:

$$\Sigma_t = \frac{1}{k_B T} \int_0^t d\tau \vec{v} \vec{F}(\tau) \quad (7)$$

Nach dieser Vorarbeit können wir uns nun der konkreten Realisierung zuwenden. Es kommt ein Laser mit einer Leistung von etwa 1 W und einer Wellenlänge von 980 nm zum Einsatz. Zunächst wird eine Latexkugel mit der vollen Laserleistung von der optischen Pinzette eingefangen. Nachdem die Leistung auf etwa 1% reduziert wurde, wird nun der Fokus mit der Geschwindigkeit \vec{v} bewegt. Dabei oszilliert

¹in Einheiten von k_B

die Kugel im Potentialtopf und wird außerdem thermisch durch das umgebende Reservoir beeinflusst. Zur Berechnung der momentan auf die Kugel wirkenden Kraft wird die Position der Kugel mit Hilfe eines Mikroskops und einer Photodiode mit einer Auflösung von etwa 15 nm bestimmt. Aus dieser Position kann gemäß Gl. 6 die wirkende Kraft ermittelt und so schließlich nach Gl. 7 die Entropieänderung berechnet werden. Die Trajektorie eines Teilchens wird ca. 10 s lang verfolgt.

Berechnet man die Entropieänderung Σ_t der Trajektorien nur bis zu einer Zeit $t = 10^{-2}$ s, so ist das sich ergebende Histogramm für Σ_t/t nahezu symmetrisch um 0. Es treten also in etwa gleich viele Trajektorien mit positiver und negativer Entropieänderung auf. Wenn man so will, ist damit in diesem Fall der zweite Hauptsatz der Thermodynamik verletzt. Wertet man die Trajektorien hingegen bis zu $t = 2$ s aus, so verschwinden bereits die Trajektorien mit negativer Entropieänderung. Eine quantitative Analyse bestätigt gerade das Fluktuationstheorem in der integrierten Form (Gl. 5).

6.3 Auswirkungen

Das Fluktuationstheorem hat insbesondere bedeutende Auswirkungen auf die Vorschreitende Miniaturisierung von Maschinen in der Nanotechnologie[Bus05]. Makroskopische Maschinen können nicht beliebig herunterskaliert werden, da ab einer gewissen Grenze die Gesetze der klassischen² Thermodynamik ihre Gültigkeit verlieren und dies die Funktionsweise der Maschinen beeinträchtigen kann.

Literatur

- [Bee08] Beerlink, A.; Institut für Röntgenphysik: Kraftmessungen in Mikroskopischen Dimensionen: Die Optische Pinzette; Fortgeschrittenen-Praktikumsanleitung; Fakultät für Physik; 2008
- [Wan02] G.M. Wang, E.M. Sevick, E. Mittag, D.J. Searles, D.J. Evans: Experimental Demonstration of Violations of the Second Law of Thermodynamics for Small Systems and Short Time Scales; Phys. Rev. Lett. 89, 5 (2002)
- [Bus05] C. Bustamante, J. Liphardt, F. Ritort: The Nonequilibrium Thermodynamics of Small Systems; Arxiv preprint cond-mat/0511629 (2005)
- [Ash92] Ashkin, A.. Forces of a single-beam gradient laser trap on a dielectric sphere in the ray optics regime; Biophysical J., 61, 569-582; Feb. 1992
- [Fae97] Fällmann, E.; Axner, O.: Design for fully steerable dual-trap optical tweezers; App. Opt., 36, 2107-2113;1997
- [Via92] K. Visscher, G. J. Brakenhoff: Theoretical study of optically induced forces on spherical particles in a single beam trap I: Rayleigh scatterers, Optik, 89, 174-180, 1992.
- [Vib92] K. Visscher, G. J. Brakenhoff: Theoretical study of optically induced forces on spherical particles in a single beam trap II: Mie scatterers, Optik, 90, 57-60, 1992.
- [Gor73] J. P. Gordon: Radiation Forces and Momenta in Dielectric Media, Phys. Rev. A, 8(1), 14-21, 1973.

²was hier nicht als Gegensatz zur Quantenmechanik zu verstehen ist

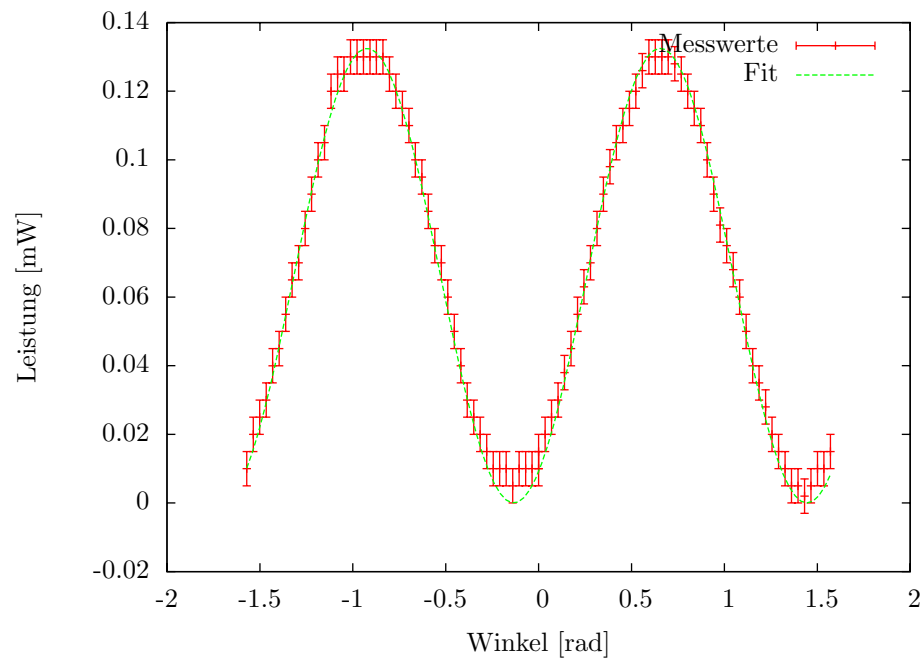


Abbildung 5: Die bei verschiedenen Winkelstellungen des $\lambda/2$ -Plättchens gemessene Laserleistung mit einem \cos^2 -Fit

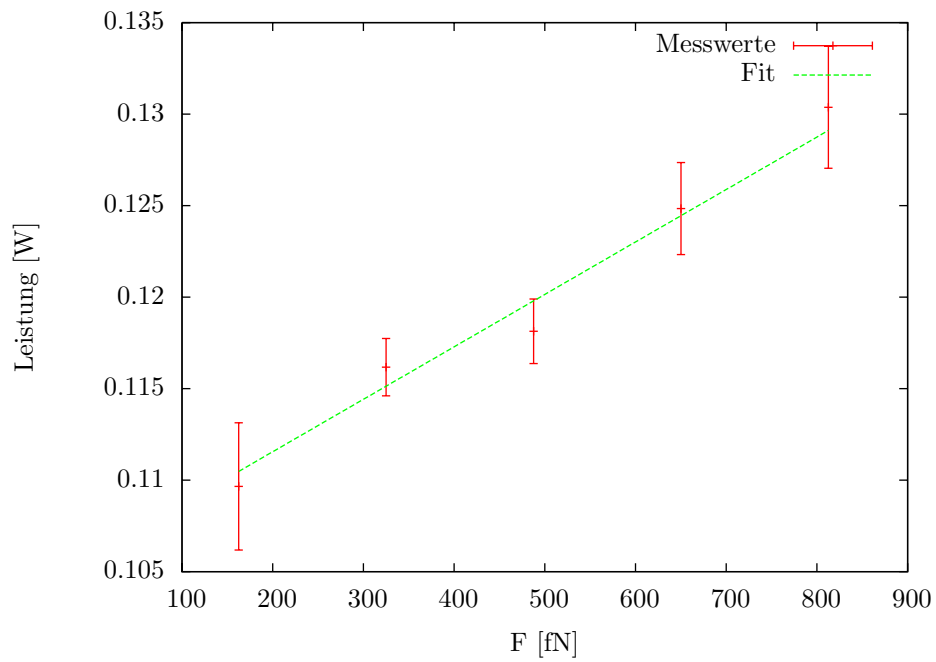


Abbildung 6: Ermittelte Leistungen bei gemessenen Abrisskräften für die Glycerin:Wasser 40:60-Mischung

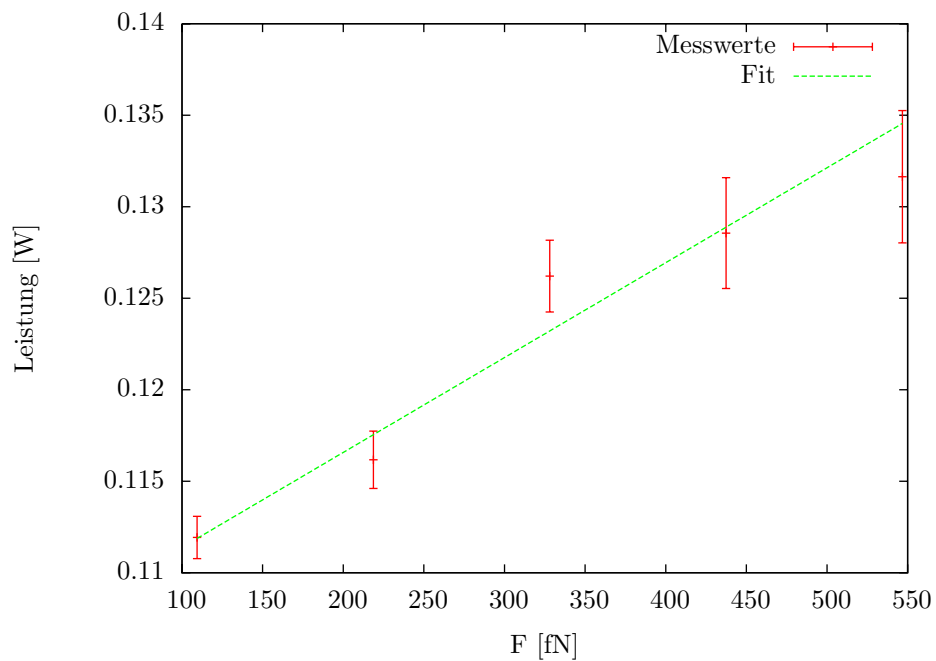


Abbildung 7: Ermittelte Leistungen bei gemessenen Abrisskräften für die Glycerin:Wasser 30:70-Mischung

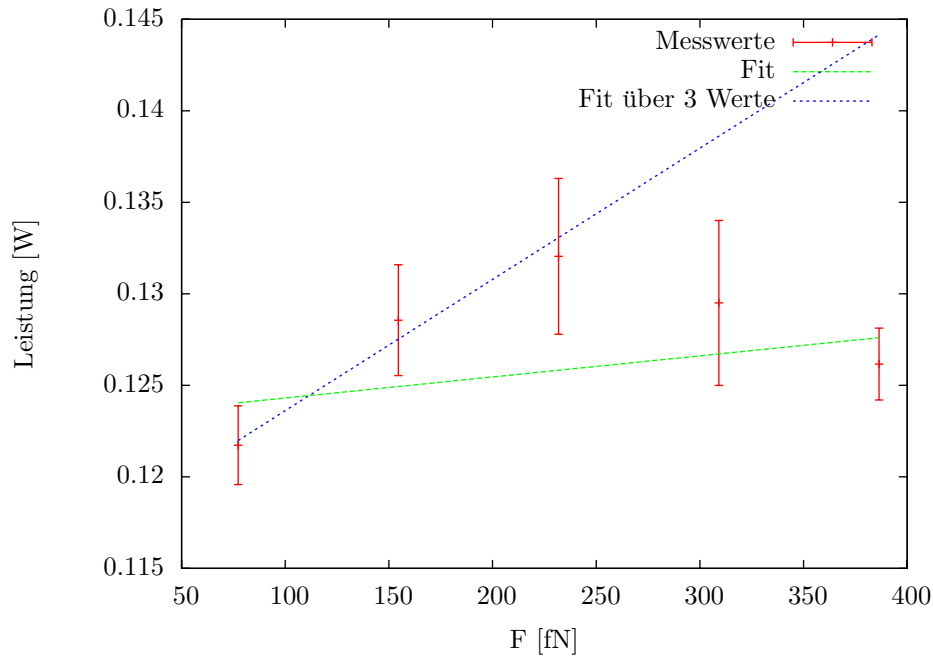


Abbildung 8: Ermittelte Leistungen bei gemessenen Abrisskräften für die Glycerin:Wasser 20:80-Mischung

40:60 Lösung		$\eta = 3,653$				
Schritte	v [$\mu\text{m/s}$]	F [N]	α_{Abriss} [$^\circ$]	P [mW]	σ_P [mW]	
50	5,90	1,6E-13	-4,667	110	3	
100	11,80	3,3E-13	-2,667	116	2	
150	17,70	4,9E-13	-2,000	118	2	
200	23,60	6,5E-13	0,667	125	3	
250	29,50	8,1E-13	4,000	130	3	

30:70 Lösung		$\eta = 2,458$				
Schritte	v [$\mu\text{m/s}$]	F [N]	α_{Abriss} [$^\circ$]	P [mW]	σ_P [mW]	
50	5,90	1,1E-13	-4,000	112	1	
100	11,80	2,2E-13	-2,667	116	2	
150	17,70	3,3E-13	1,333	126	2	
200	23,60	4,4E-13	2,667	129	3	
250	29,50	5,5E-13	5,333	132	4	

20:80 Lösung		$\eta = 1,737$				
Schritte	v [$\mu\text{m/s}$]	F [N]	α_{Abriss} [$^\circ$]	P [mW]	σ_P [mW]	
50	5,90	7,7E-14	-0,667	122	2	
100	11,80	1,5E-13	2,667	129	3	
150	17,70	2,3E-13	9,333	132	4	
200	23,60	3,1E-13	12,000	130	5	
250	29,50	3,9E-13	14,000	126	2	

Tabelle 1: Messwerte und Rechnungen für die Eichung